

循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007

第2回/全3回

A LIFE COM. バイオ研究室

富岡和人

1. まえがき

本初級講座の第2回では前回で説明した物理的モデルと数学的モデルを使って、循環系の回路モデルの線形微分方程式系を導出する。そして、導出した線形微分方程式系を使用して、循環系の回路モデルの線形時変システムの記述をする。この線形時変システムは最終回——次回の本講座の第3回——で数値解析をして、その線形時変システムの出力の特性を考察する。

ヒトの左心室の容積と内圧が本講座で使う測定値である。この測定値は小数点以下一桁までの表示である。他の部位の測定値は、本講座では使用していない。本講座の第3回で紹介する線形時変システムの数値解析の結果はこの測定値と完全に一致している。この計算結果は、物理的モデルでは第1回の図2.1で内圧制御内圧源を与えたことで説明できる。内圧制御内圧源の内圧が数学的モデルである線形時変システムの強制項と呼ばれる項になり、この強制項の導入で解の特性が著しく向上した。著者が構築した本講座の理論では、血液量には電気量の電場に対応する場を与えていない。しかし、内圧制御内圧源の入力端子の内圧で心室部の血液は移動することができる。このことは、他の文献の循環系の回路モデル理論と著者が構築した本講座の理論との間の著しい異なりとなる。この異なりは、第2回の重要な部分となる。

文献1は著者の約10年間の研究成果の一部を発表した論文である。文献2は本書の第1回である。文献3～文献6は、循環系の回路モデルの参考資料として発行した電気の回路論を論じたPDF文書である。文献7は血流量の研究成果を発表した論文である。文献7で血流量およびインダクタンスの定義を発表している。

目次

1. まえがき	1
目次	2
2. 電気回路要素との対応関係	3
3. 循環系の回路モデルの回路方程式の導出	5
4. あとがき	11
参考文献	11
免責事項	12
著作権	12

A LIFE COM.

2. 電気回路要素との対応関係

図 2.1 は本講座の第 1 回で説明した循環系の回路モデルの物理的モデルである。本講座の第 2 回では図 2.1 から回路方程式を導出して循環系の回路モデルの線形時変システムを記述する。この線形時変システムは行列で記述する。

図 2.1 のスイッチは、図 2.2 の心臓周期の時間関係の心室の収縮期と弛緩期に分けて開閉を決定する。このために、これから導出する回路方程式は収縮期と弛緩期の二つの時相に分けて記述することになる。本講座では循環系の回路モデル——図 2.1 の物理的モデル——の回路要素と電気回路要素に対応関係¹⁾を図 2.3 で与える。この図 2.3 の電気回路要素との対応関係の導入で図 2.1 の物理的モデルを電気の回路網と見なすことができる。このことから、電気の回路網理論を使用して循環系の回路モデルのシステムを方程式で記述できる。ただし、本講座では左心室と右心室の心臓周期の時間関係は完全に一致しており、心臓弁の開閉の時間のずれはないものとする。

図 2.3 では電気量と血液量を対応させた。しかし、2007 年現在の著者が構築している循環系の回路モデル理論では、電気量は電場を生じさせるが血液量には電場に対応するものは与えていない。このことは、図 2.1 を循環系の回路モデルとして解釈する場合と電気の回路網として解釈する場合に生じる重要な異なりとなる。このことが、本初級講座の理論と一部の一般的な循環系の回路モデル——本初級講座の理論とは異なるもの——の理論に於ける見識の異なる部分となる。本講座の循環系の回路モデル理論は、著者が独自に構築したものである。このことは、読者諸氏に注意して頂きたいと著者は考える。学校や研究室で使用している 2007 年現在の理論とは異なることが著しく考えられる。

本講座の第 1 回では、文献 2 の (3.2.1) でコンプライアンスを与えている。この (3.2.1) の分子は心臓あるいは血管内に蓄積されている血液量である。(3.2.1) の分母は、心臓あるいは血管内壁に作用している 0 mmHg に対する内圧である。しかし、心臓あるいは血管内に血液が蓄積されているだけでは、その血液を移動させる内圧は発生しないことは周知である。(3.2.1) のコンプライアンスはその臓器——ここでは心臓あるいは血管のことである。——の特性として理解するものである。コンプライアンスが算出できるのみでは、図 2.1 の各コンプライアンスには血液を移動させることができる内圧が作用しているものとは解釈できない。図 2.1 でプレッシャホロウを接続していないコンプライアンスには、心室のような内圧を発生させる機能は表現していない。図 2.1 のプレッシャホロウを接続していないコンプライアンスの内圧は心室部で生じた内圧が降下した内圧であるものと著者は考える。図 2.1 では左心室部と右心室部のみで内圧を発生させている。図 2.1 は簡単なモデルであり、厳密なモデルではない。実際のヒトの生体システムでは図 2.1 のようではないことは生理学での報告でも知ることができるものと著者は考えている。

電気回路要素とのコンデンサとコンプライアンスは図 2.3 で対応関係を与えられた。しかし、コンデンサには電気量が与えられると電場の影響から電圧がコンデンサに生じることは明らかである。このことは、コンプライアンスに血液量を与えても内圧が生じないこととは異なる。

しかし、2007 年現在の論文や成書で紹介している循環系の回路モデルには心臓のコンプライアンスに内圧を与える回路あるいは素子を接続していないものがある。そして、それらでは心臓から血液が流れることを説明している。また、それらでは心臓-血管系内で血液が循環することを説明しているものがある。このことは上述の電場に関する見識の異なりがあるものと著者は考える。このことは、読者諸氏にも注意して頂きたいものと著者は考えている。

本講座では、図 2.3 の対応関係を導入すると本講座の第 1 回で紹介したプレッシャホロワは電子回路のボルテージホロワに対応することになる。電子回路ではボルテージホロワは線形回路となることは周知である。本講座で使用する電子工学のボルテージホロワは理想的な演算増幅器である。ボルテージホロワをコンデンサの端子に接続してもコンデンサからボルテージホロワの向きに電流は生じない。また、ボルテージホロワからコンデンサに向かって電流は生じない。このことは、図 2.1 を電気の線形回路網と見なして回路方程式を導出する際に重要な条件となる。

本講座の第 1 回で紹介した内圧制御内圧源は、電子回路論の電圧制御電圧源と対応関係を与える。電圧制御電圧源は入力端子の電圧で出力端子の電圧を制御できるものである。

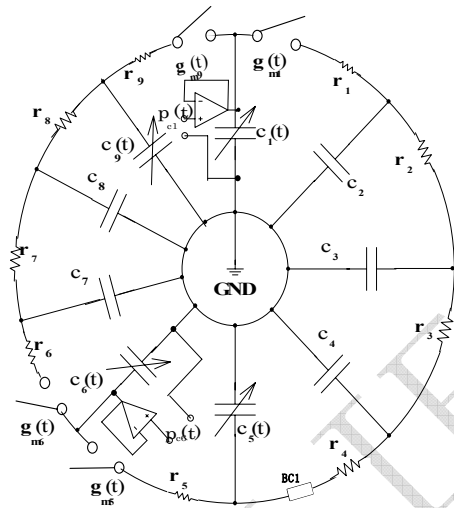


図 2.1 循環系の集中定数回路モデル

図 2.1 の物理的モデルの要素についての解釈を挙げる。
物理的モデルの要素への物理的解釈

- r_1, r_5, r_6, r_9 : 流れの抵抗
- r_2, r_3, r_4 : 体循環に於ける流れの抵抗; r_7, r_8 : 肺循環に於ける流れの抵抗
- c_2 : 体循環に於ける上行大動脈のコンプライアンス
- c_3 : 体循環に於ける血流路(血流路 1)のコンプライアンス
- c_4 : 体循環に於ける血流路(血流路 2)のコンプライアンス
- $c_5(t)$: 左心室のコンプライアンス; $c_6(t)$: 右心室のコンプライアンス
- c_7 : 肺循環に於ける血流路(血流路 3)のコンプライアンス
- c_8 : 肺循環に於ける血流路(血流路 4)のコンプライアンス
- $p_{c1}(t)$: 左心室の内圧
- $p_{c6}(t)$: 右心室の内圧
- BC1 (整流素子あるいは波形操作回路): 静脈弁
- g_{m1} (出口弁): 大動脈弁(半月弁); g_{m5} (入口弁): 三尖弁(房室弁)
- g_{m9} (出口弁): 肺動脈弁(半月弁); g_{m9} (入口弁): 僧帽弁(房室弁)

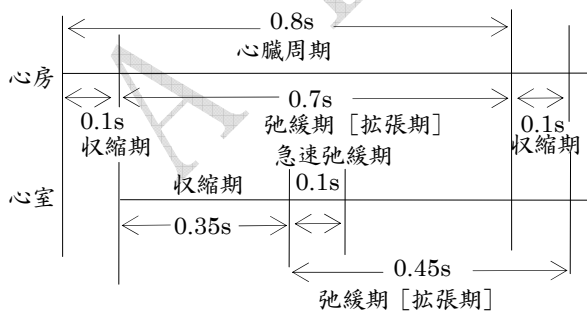


図 2.2 心臓周期の時間関係

内圧	⇔	電位
流れの抵抗	⇔	電気抵抗
血液量	⇔	電気量
コンプライアンス	⇔	コンデンサ
インダクタンス	⇔	インダクタンス

図 2.3 電気回路要素との対応関係

図 2.1 に使用する回路要素は、本講座の第 1 回で説明した。これらの回路要素は電気の回路理論では線形素子と線形回路になる。このために、図 2.1 の回路網は電気の回路論では線形回路網と見なすことができる。電気の線形回路網では、キルヒホッフの法則が成立することは周知である。このキルヒホッフの法則を使用して回路方程式を導出する。そして、その回路方程式による連立方程式から線形微分方程式系——この線形微分方程式系は齊次方程式と呼ばれる。——を導出する。この導出した線形微分方程式系を使って、非齊次方程式となる線形微分方程式系を導出する。本講座の第 3 回——

次回で最終回——で数値解析をしてこの非斉次方程式の解の特性について考察する。

3. 循環系の回路モデルの回路方程式の導出

電気の回路網でキルヒホッフの法則が成立するように、循環系の回路網内の血流の操作をするものとして図 2.1 の BC 1 を扱う。このために、本講座での回路方程式の導出にはキルヒホッフの法則が本章で成立するように記述する。

図 2.1 を電気の線形回路網と見なして、電圧平衡の法則——キルヒホッフの第 2 法則——を使って (3.1) ~ (3.14) の方程式を記述できる。(3.1) ~ (3.7) は心室の収縮期に対応する方程式である。(3.8) ~ (3.14) は心室の弛緩期に対応する方程式である。電位については文献 3 で説明してある。キルヒホッフの第 2 法則については文献 4 で説明してある。

収縮期の場合

$$p_{c1}(t) - p_{c2}(t) - p_{r1}(t) = 0 \dots (3.1), p_{c2}(t) - p_{c3}(t) - p_{r2}(t) = 0 \dots (3.2), p_{c3}(t) - p_{c4}(t) - p_{r3}(t) = 0 \dots (3.3)$$

$$p_{c4}(t) - p_{c5}(t) - p_{r4}(t) = 0 \dots (3.4)$$

$$p_{c6}(t) - p_{c7}(t) - p_{r6}(t) = 0 \dots (3.5), p_{c7}(t) - p_{c8}(t) - p_{r7}(t) = 0 \dots (3.6), p_{c8}(t) - p_{c9}(t) - p_{r8}(t) = 0 \dots (3.7)$$

弛緩期の場合

$$p_{c2}(t) - p_{c3}(t) - p_{r2}(t) = 0 \dots (3.8), p_{c3}(t) - p_{c4}(t) - p_{r3}(t) = 0 \dots (3.9), p_{c4}(t) - p_{c5}(t) - p_{r4}(t) = 0 \dots (3.10)$$

$$p_{c5}(t) - p_{c6}(t) - p_{r5}(t) = 0 \dots (3.11)$$

$$p_{c7}(t) - p_{c8}(t) - p_{r7}(t) = 0 \dots (3.12), p_{c8}(t) - p_{c9}(t) - p_{r8}(t) = 0 \dots (3.13), p_{c9}(t) - p_{c1}(t) - p_{r9}(t) = 0 \dots (3.14)$$

各コンデンサに対応する各コンプライアンスの血流量——文献 2 の (3.1.3) で定義した。——は (3.15) ~ (3.23) で記述できる。(3.15.systole) ~ (3.23.systole) は左心室の収縮期での血流量である。(3.15.diastole) ~ (3.23.diastole) は左心室の弛緩期——あるいは拡張期と呼ぶ。——での血流量である。これらの血流量は体積として扱える血液量の時間に対する変化率である。“正味の血液量”については文献 2 および文献 7 に説明してある。電気量については文献 5 で説明してある。コンデンサについては文献 6 で説明してある。

$$i_{c1}(t) = -\frac{dq_{c1}}{dt} \dots (3.15.systole) \quad i_{c1}(t) = \frac{dq_{c1}}{dt} \dots (3.15.diastole) \quad i_{c2}(t) = \frac{dq_{c2}}{dt} \dots (3.16.systole) \quad i_{c2}(t) = -\frac{dq_{c2}}{dt} \dots (3.16.diastole)$$

$$i_{c3}(t) = \frac{dq_{c3}}{dt} \dots (3.17.systole) \quad i_{c3}(t) = -\frac{dq_{c3}}{dt} \dots (3.17.diastole) \quad i_{c4}(t) = \frac{dq_{c4}}{dt} \dots (3.18.systole) \quad i_{c4}(t) = -\frac{dq_{c4}}{dt} \dots (3.18.diastole)$$

$$i_{c5}(t) = \frac{dq_{c5}}{dt} \dots (3.19.systole) \quad i_{c5}(t) = -\frac{dq_{c5}}{dt} \dots (3.19.diastole)$$

$$i_{c6}(t) = -\frac{dq_{c6}}{dt} \dots (3.20.systole) \quad i_{c6}(t) = \frac{dq_{c6}}{dt} \dots (3.20.diastole) \quad i_{c7}(t) = \frac{dq_{c7}}{dt} \dots (3.21.systole) \quad i_{c7}(t) = -\frac{dq_{c7}}{dt} \dots (3.21.diastole)$$

$$i_{c8}(t) = \frac{dq_{c8}}{dt} \dots (3.22.systole) \quad i_{c8}(t) = -\frac{dq_{c8}}{dt} \dots (3.22.diastole) \quad i_{c9}(t) = \frac{dq_{c9}}{dt} \dots (3.23.systole) \quad i_{c9}(t) = -\frac{dq_{c9}}{dt} \dots (3.23.diastole)$$

各電気抵抗に対応する各流れの抵抗に生じる血流量——文献 2 の (3.3.1) で算出できる。——は (3.24) ~ (3.32) で記述できる。本講座では流れの抵抗は定数として計算する。

$$i_{r1}(t) = \frac{P_{c1} - P_{c2}}{r_1} \dots (3.24) \quad i_{r2}(t) = \frac{P_{c2} - P_{c3}}{r_2} \dots (3.25) \quad i_{r3}(t) = \frac{P_{c3} - P_{c4}}{r_3} \dots (3.26) \quad i_{r4}(t) = \frac{P_{c4} - P_{c5}}{r_4} \dots (3.27)$$

$$i_{r5}(t) = \frac{P_{c5} - P_{c6}}{r_5} \dots (3.28) \quad i_{r6}(t) = \frac{P_{c6} - P_{c7}}{r_6} \dots (3.29) \quad i_{r7}(t) = \frac{P_{c7} - P_{c8}}{r_7} \dots (3.30) \quad i_{r8}(t) = \frac{P_{c8} - P_{c9}}{r_8} \dots (3.31)$$

$$i_{r9}(t) = \frac{P_{c9} - P_{c1}}{r_9} \dots (3.32)$$

(3.1) ~ (3.14) および (3.24) ~ (3.32) を使って (3.33) ~ (3.41) が記述できる。(3.33) ~ (3.41) は電気回路論のオームの法則から記述できる。本講座では、文献 2 で紹介した (3.3.1) から記述できる。(3.33) ~ (3.41) では流れの抵抗の端子間で内圧が低下することを説明している。オームの法則については文献 4 で説明してある。

$$p_{r1}(t) = r_1 \times i_{r1}(t) \dots (3.33) \quad p_{r2}(t) = r_2 \times i_{r2}(t) \dots (3.34) \quad p_{r3}(t) = r_3 \times i_{r3}(t) \dots (3.35) \quad p_{r4}(t) = r_4 \times i_{r4}(t) \dots (3.36)$$

$$p_{r5}(t) = r_5 \times i_{r5}(t) \dots (3.37) \quad p_{r6}(t) = r_6 \times i_{r6}(t) \dots (3.38) \quad p_{r7}(t) = r_7 \times i_{r7}(t) \dots (3.39) \quad p_{r8}(t) = r_8 \times i_{r8}(t) \dots (3.40)$$

$$p_{r9}(t) = r_9 \times i_{r9}(t) \dots (3.41)$$

電流連続の法則——キルヒホッフの第 1 法則——を使用して、図 2.1 の各接続点に対して (3.42) ~ (3.59) を記述できる。(3.42) ~ (3.50) を使って収縮期の微分方程式系を導出できる。この導出の際に、(3.15) ~ (3.23) を左辺に記述して (3.24) ~ (3.32) を右辺に記述して血液量の微分方程式を記述する。(3.51) ~ (3.59) を使って弛緩期の微分方程式系を導出する際にも収縮期の場合と同様である。キルヒホッフの第 1 法則については文献 4 で説明してある。

収縮期の場合

$$i_{c1}(t) - i_{r1}(t) = 0 \dots (3.42), i_{r1}(t) - i_{c2}(t) - i_{r2}(t) = 0 \dots (3.43), i_{r2}(t) - i_{c3}(t) - i_{r3}(t) = 0 \dots (3.44)$$

$$i_{r3}(t) - i_{c4}(t) - i_{r4}(t) = 0 \dots (3.45) \quad i_{r4}(t) - i_{c5}(t) = 0 \dots (3.46)$$

$$i_{c6}(t) - i_{r6}(t) = 0 \dots (3.47), i_{r6}(t) - i_{c7}(t) - i_{r7}(t) = 0 \dots (3.48), i_{r7}(t) - i_{c8}(t) - i_{r8}(t) = 0 \dots (3.49)$$

$$i_{r8}(t) - i_{c9}(t) = 0 \dots (3.50)$$

弛緩期の場合

$$i_{c2}(t) - i_{r2}(t) = 0 \dots (3.51), i_{r2}(t) - i_{c3}(t) - i_{r3}(t) = 0 \dots (3.52), i_{r3}(t) - i_{c4}(t) - i_{r4}(t) = 0 \dots (3.53)$$

$$i_{r4}(t) - i_{c5}(t) - i_{r5}(t) = 0 \dots (3.54) \quad i_{r5}(t) - i_{c6}(t) = 0 \dots (3.55)$$

$$i_{c7}(t) - i_{r7}(t) = 0 \dots (3.56), i_{r7}(t) - i_{c8}(t) - i_{r8}(t) = 0 \dots (3.57), i_{r8}(t) - i_{c9}(t) - i_{r9}(t) = 0 \dots (3.58)$$

$$i_{i_9}(t) - i_{c_1}(t) = 0 \dots (3.59)$$

各コンデンサに対応する各コンプライアンスの血液量——文献 2 の (3.2.1) で算出できる。——は (3.60) ~ (3.68) で記述できる。ただし、2 章でも注意したが、(3.60) ~ (3.68) が成立しても、そのことが各コンプライアンスの部位に内圧が作用していることを意味するものではない。コンプライアンスは心室・心房・血管——図 2.1 では血流路となる。——の特性にすぎない。

$$q_{c_1}(t) = c_1(t) \times p_{c_1}(t) \dots (3.60) \quad q_{c_2}(t) = c_2 \times p_{c_2}(t) \dots (3.61) \quad q_{c_3}(t) = c_3 \times p_{c_3}(t) \dots (3.62) \quad q_{c_4}(t) = c_4 \times p_{c_4}(t) \dots (3.63)$$

$$q_{c_5}(t) = c_5(t) \times p_{c_5}(t) \dots (3.64) \quad q_{c_6}(t) = c_6(t) \times p_{c_6}(t) \dots (3.65) \quad q_{c_7}(t) = c_7 \times p_{c_7}(t) \dots (3.66) \quad q_{c_8}(t) = c_8 \times p_{c_8}(t) \dots (3.67)$$

$$q_{c_9}(t) = c_9(t) \times p_{c_9}(t) \dots (3.68)$$

収縮期：(3.69) ～ (3.77) は収縮期に成立する循環系の連立微分方程式である。

$$\frac{dq_{c1}(t)}{dt} = \left(-\frac{q_{c1}(t)}{r_1 \times c_1(t)} + \frac{q_{c2}(t)}{r_1 \times c_2} \right) \dots (3.69)$$

$$\frac{dq_{c2}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c1}(t)}{r_1 \times c_1(t)} - \frac{q_{c2}(t)}{r_1 \times c_2} \right) + \left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} + \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3} \right) \dots (3.70)$$

$$\frac{dq_{c3}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} - \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3} \right) + \left(-\frac{q_{c3}(t)}{r_3 \times c_3} + \frac{q_{c4}(t)}{r_3 \times c_4} \right) \dots (3.71)$$

$$\frac{dq_{c4}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c3}(t)}{r_3 \times c_3} - \frac{q_{c4}(t)}{r_3 \times c_4} \right) + \left(-\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} + \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)} \right) \dots (3.72)$$

$$\frac{dq_{c5}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} - \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)} \right) \dots (3.73)$$

$$\frac{dq_{c6}(t)}{dt} = \left(-\frac{q_{c6}(t)}{r_6 \times c_6(t)} + \frac{q_{c7}(t)}{r_6 \times c_7} \right) \dots (3.74)$$

$$\frac{dq_{c7}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c6}(t)}{r_6 \times c_6(t)} - \frac{q_{c7}(t)}{r_6 \times c_7} \right) + \left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} + \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8} \right) \dots (3.75)$$

$$\frac{dq_{c8}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} - \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8} \right) + \left(-\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} + \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)} \right) \dots (3.76)$$

$$\frac{dq_{c9}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} - \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)} \right) \dots (3.77)$$

弛緩期：(3.78) ～ (3.86) は弛緩期に成立する循環系の連立微分方程式である。

$$\frac{dq_{c1}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c9}(t)}{r_9 \times c_9(t)} - \frac{q_{c1}(t)}{r_9 \times c_1(t)} \right) \dots (3.78)$$

$$\frac{dq_{c2}(t)}{dt} = \left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} + \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3} \right) \dots (3.79)$$

$$\frac{dq_{c3}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} - \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3} \right) + \left(-\frac{q_{c3}(t)}{r_3 \times c_3} + \frac{q_{c4}(t)}{r_3 \times c_4} \right) \dots (3.80)$$

$$\frac{dq_{c4}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c3}(t)}{r_3 \times c_3} - \frac{q_{c4}(t)}{r_3 \times c_4} \right) + \left(-\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} + \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)} \right) \dots (3.81)$$

$$\frac{dq_{c5}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} - \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)} \right) + \left(-\frac{q_{c5}(t)}{r_5 \times c_5(t)} + \frac{q_{c6}(t)}{r_5 \times c_6(t)} \right) \dots (3.82)$$

$$\frac{dq_{c6}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c5}(t)}{r_5 \times c_5(t)} - \frac{q_{c6}(t)}{r_5 \times c_6(t)} \right) \dots (3.83)$$

$$\frac{dq_{c7}(t)}{dt} = \left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} + \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8} \right) \dots (3.84)$$

$$\frac{dq_{c8}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} - \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8} \right) + \left(-\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} + \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)} \right) \dots (3.85)$$

$$\frac{dq_{c9}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} - \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)} \right) + \left(-\frac{q_{c9}(t)}{r_9 \times c_9(t)} + \frac{q_{c1}(t)}{r_9 \times c_1(t)} \right) \dots (3.86)$$

収縮期：(3.87) ~ (3.95) は収縮期の——本講座の第 3 回の数値解析で使う——連立微分方程式である。(3.70) には (3.60) の内圧を代入する。(3.75) には (3.65) の内圧を代入する。このことで (3.88) と (3.93) を記述できる。この内圧を代入することができるのは図 2.1 の内圧制御内圧源を接続したためである。ただし、ここで (3.69), (3.70), (3.74) および (3.75) のどの項に内圧の関数を代入するかは図 2.1 の表示では明らかではない。本講座では (3.87) と (3.92) にはコンプライアンスの関数を記述して数値解析をすることを著者が希望したために (3.88) および (3.93) のように記述した。

$$q_{c1}(t) = c_1(t) \times p_{c1}(t) \dots (3.60)$$

$$q_{c6}(t) = c_6(t) \times p_{c6}(t) \dots (3.65)$$

$$\frac{dq_{c1}(t)}{dt} = \left(-\frac{q_{c1}(t)}{r_1 \times c_1(t)} + \frac{q_{c2}(t)}{r_1 \times c_2} \right) \dots (3.87)$$

$$\frac{dq_{c2}(t)}{dt} = \left(\frac{p_{c1}(t)}{r_1} - \frac{q_{c2}(t)}{r_1 \times c_2} \right) + \left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} + \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3} \right) \dots (3.88)$$

$$\frac{dq_{c3}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} - \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3} \right) + \left(-\frac{q_{c3}(t)}{r_3 \times c_3} + \frac{q_{c4}(t)}{r_3 \times c_4} \right) \dots (3.89)$$

$$\frac{dq_{c4}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c3}(t)}{r_3 \times c_3} - \frac{q_{c4}(t)}{r_3 \times c_4} \right) + \left(-\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} + \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)} \right) \dots (3.90)$$

$$\frac{dq_{c5}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} - \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)} \right) \dots (3.91)$$

$$\frac{dq_{c6}(t)}{dt} = \left(-\frac{q_{c6}(t)}{r_6 \times c_6(t)} + \frac{q_{c7}(t)}{r_6 \times c_7} \right) \dots (3.92)$$

$$\frac{dq_{c7}(t)}{dt} = \left(\frac{p_{c6}(t)}{r_6} - \frac{q_{c7}(t)}{r_6 \times c_7} \right) + \left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} + \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8} \right) \dots (3.93)$$

$$\frac{dq_{c8}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} - \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8} \right) + \left(-\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} + \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)} \right) \dots (3.94)$$

$$\frac{dq_{c9}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} - \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)} \right) \dots (3.95)$$

弛緩期：(3.96) ～ (3.104) は弛緩期の——本講座の第 3 回の数値解析で使う——連立微分方程式である。(3.82) には (3.65) の内圧を代入する。(3.86) には (3.60) の内圧を代入する。このことで (3.100) と (3.104) を記述できる。この内圧を代入することができるのは図 2.1 の内圧制御内圧源を接続したためである。ただし、ここで (3.78), (3.82), (3.83) および (3.86) のどの項に内圧の関数を代入するかは図 2.1 の表示では明らかではない。本講座では (3.96) と (3.101) にはコンプライアンスの関数を記述して数値解析をすることを著者が希望したために (3.100) と (3.104) のように記述した。

$$\frac{dq_{c1}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c9}(t)}{r_9 \times c_9(t)} - \frac{q_{c1}(t)}{r_9 \times c_1(t)} \right) \dots (3.96)$$

$$\frac{dq_{c2}(t)}{dt} = \left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} + \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3} \right) \dots (3.97)$$

$$\frac{dq_{c3}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} - \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3} \right) + \left(-\frac{q_{c3}(t)}{r_3 \times c_3} + \frac{q_{c4}(t)}{r_3 \times c_4} \right) \dots (3.98)$$

$$\frac{dq_{c4}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c3}(t)}{r_3 \times c_3} - \frac{q_{c4}(t)}{r_3 \times c_4} \right) + \left(-\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} + \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)} \right) \dots (3.99)$$

$$\frac{dq_{c5}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} - \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)} \right) + \left(-\frac{q_{c5}(t)}{r_5 \times c_5(t)} + \frac{p_{c6}(t)}{r_5} \right) \dots (3.100)$$

$$\frac{dq_{c6}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c5}(t)}{r_5 \times c_5(t)} - \frac{q_{c6}(t)}{r_5 \times c_6(t)} \right) \dots (3.101)$$

$$\frac{dq_{c7}(t)}{dt} = \left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} + \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8} \right) \dots (3.102)$$

$$\frac{dq_{c8}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} - \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8} \right) + \left(-\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} + \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)} \right) \dots (3.103)$$

$$\frac{dq_{c9}(t)}{dt} = \left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} - \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)} \right) + \left(-\frac{q_{c9}(t)}{r_9 \times c_9(t)} + \frac{p_{c1}(t)}{r_9} \right) \dots (3.104)$$

(3.69) ~ (3.77), (3.78) ~ (3.86), (3.87) ~ (3.95) あるいは (3.96) ~ (3.104) ではそれぞれ (3.105) を満足する. 図 2.1 の各コンプライアンスあるいは線形微分方程式系の総血液量が時間に対する変化をしないことを (3.105) は意味する. 本講座の理論上の循環系に想定している総血液量は時間に対して変化しない.

$$\sum_{i=1}^9 \frac{dq_{ci}}{dt} = 0 \dots (3.105)$$

(3.87) ~ (3.95) の線形微分方程式系を使って (3.106) のような線形時変システムを記述できる. 同様に, (3.96) ~ (3.104) の線形微分方程式系を使って (3.106) のようなシステムを記述できる. (3.106) の出力は血液量である. (3.106) の線形微分方程式系は非斉次方程式である. (3.107) の行列は周期関数になる. また, (3.107) および (3.108) の行列のすべての成分は連続で有界である. (3.109) は (3.106) の線形微分方程式系の右辺の第二項に記述してある. (3.109) は強制項と呼ばれるものである. (3.109) のすべての成分は——連続で有界な——内圧の周期関数あるいは零と考えることができる. (3.108) の行列は定数行列である. (3.110) の記述の場合は, (3.110) は斉次方程式と呼ばれる. (3.69) ~ (3.77) の方程式系も斉次方程式に記述できるが, (3.110) の行列の成分とは異なることは明らかである. (3.78) ~ (3.86) の場合も同様である.

$$\begin{cases} \frac{dq(t)}{dt} = B(t)q(t) + D \times u(t) \dots (3.106) \\ y(t) = q(t) \end{cases}$$

$$B(t) \in R^{n \times n} \dots (3.107)$$

$$D \in R^{n \times r} \dots (3.108)$$

$$u(t) \dots (3.109)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = B(t)q(t) \dots (3.110)$$

4. あとがき

本講座の第 3 回では, 第 2 回で導出した (3.106) の線形時変システムの数値解析をする. 第 3 回に掲載する数値解析の結果は, 著者が 1998 年に計算したものである. また, その数値解析の結果から線形時変システム (3.106) の解——ここでは出力とも呼ぶ. ——の安定性について考察する.

数値解析で使用したプログラム言語は数式処理言語の Mathematica 3.0 Students Version である. 数値解析するには (3.87) ~ (3.95) および (3.96) ~ (3.104) を使用する. これらの微分方程式に記述した関数は三角多項式での近似式を使用する.

第 3 回では, 第 1 回で説明したインダクタンスを使用した回路について説明する. その回路を使用することで図 2.1 の回路網よりも実際の心臓血管系の内圧および容積に近い値を与えることができることを考察する.

参考文献

- 1) [富岡和人, "AL COM.CVSyst.1 on Dec. 27, 2006", 循環系に関する研究報告, \(2006-12-27\), pp.10-14, pp.37-39, pp.42-58](#)

- 2) [富岡和人, “循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第 1 回”, A LIFE COM.](#)
- 3) [富岡和人, “電位の簡単な入門 2007 第 3 回”, A LIFE COM.](#)
- 4) [富岡和人, “電位の簡単な入門 2007 第 5 回”, A LIFE COM.](#)
- 5) [富岡和人, “電位の簡単な入門 2007 第 2 回”, A LIFE COM.](#)
- 6) [富岡和人, “電位の簡単な入門 2007 第 4 回”, A LIFE COM.](#)
- 7) [富岡和人, “AL COM.CVSyst.2 on Dec. 25, 2008”, 循環系に関する研究報告, \(2008-12-25\), pp.7-8.](#)

免責事項

A LIFE COM.および外部の情報提供者は、ユーザーに対しこの Web サイトの内容について何ら保証するものではありません。ユーザーが A LIFE COM.の Web サイトを利用したことにより被った損失・損害、その他 A LIFE COM. の Web サイトに関連して被った損失・損害について、A LIFE COM. および外部の情報提供者は、一切責任を負いません。

本資料は情報提供を目的として作成したものです。本資料の真偽に対しては、著者、A LIFE COM.および A LIFE COM.のバイオ研究室は一切の責任を負いません。

著作権

Copyright © 2007–2009 富岡和人 All rights reserved.

文書のプロパティの文書に関する制限の概要の表示内容については著者の許可のないものとします。

本ドキュメントのバックアップのコピーは許可します。

本ドキュメントを私的利用の範囲内で印刷することは許可します。

作成日：2007 年 01 月 07 日
 発行日：2007 年 01 月 07 日
 改訂発行日：2009 年 01 月 09 日

電気の回路論の文献

[“電位の簡単な入門 2007 第 1 回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007Option”](#)

アインシュタインの特殊相対性理論の文献

[“特殊相対性理論の速度の変換”](#)

[“特殊相対性理論のエネルギーの変換と相対論的質量の変換”](#)

ホームページ

<http://www.alifecom.info/>

<http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/>

<http://book.geocities.jp/alifecominfo/>

<http://alifecominfo.aikotoba.jp/>