

特殊相対性理論の速度の変換

——アインシュタインの特殊相対性理論での時点および位置の隔たり——

A LIFE COM. バイオ研究室

富岡和人

1 まえがき

本書では、アインシュタインの特殊相対性理論での速度の変換の導出およびその説明をする。この速度の変換を導出する際に速度を使用する。その速度の定義の説明の後に、速度の変換の導出をする。本書で与える速度の定義では、質点を仮定して位置の隔たりと時点の隔たりを使用する。アインシュタインの特殊相対性理論で使用する位置の隔たりと時点の隔たりは、ニュートンの三つの運動の法則で使用するものとは異なる。このことを本書の考察で使用するの、特殊相対性理論の位置の隔たりおよび時点の隔たりの特徴的な箇所を説明した。そして、それらの特徴的な箇所は、大学課程の特殊相対性理論を学習する上でも重要な部分として扱われるものと著者は考える。本書では速度の変換についての考察をしている。その考察の程度は、少なくとも2008年現在の一般的な大学の特殊相対性理論の講義での速度の変換の考察の程度にはなるものと著者は考えている。このような意味では、付録での説明をも含めているものとする。しかし、本書では付録は必須の箇所として定めてはいない。本書の各章および付録では次のように説明した。

2章ではアインシュタインの特殊相対性理論で使用する時間と空間の関係がニュートンの三つの運動の法則で使用する時間および空間の関係とは異なることを説明した。本書のアインシュタインの特殊相対性理論では慣性座標系内の各位置に時計を仮定しないと、慣性座標系内の座標の成分のみでは質点の位置を示す関数を導入できない。各位置に時計を仮定した慣性座標系の速さおよび座標成分を使用して、各慣性座標系の空間座標の位置および時間座標の時点についてのローレンツ変換を与えることができる。この各慣性座標系の速さを計算するためには質点の位置を示す関数を仮定した速度を使用する。そして、他方の慣性座標系の時間、速さおよび空間の座標での位置の隔たりで、特殊相対性理論で使用する慣性座標系の時間は決定できる。この時間および空間の座標との相対性は特殊相対性理論の位置の隔たりおよび時点の隔たりを扱う上で度々使用する。位置の隔たりおよび時点の隔たりを記述するにはローレンツ変換を使用する。このことから、特殊相対性理論で使用するローレンツ変換および時点の微分について説明した。そして、ローレンツ変換、位置の隔たりおよび時点の隔たりを使用した時計の同期および時間の長短についての考察を2章1節および2章2節で与えた。アインシュタインの特殊相対性理論で慣性座標系内の各位置に仮定した時計は、他の慣性座標系の時計とは同期が取れていないことを2章1節で考察した。2章1節では、慣性座標系内の座標の成分を使用してその計算をした。速度の定義では位置の隔たりおよび時点の隔たりを使用するので、2章2節では、質点の位置を示す関数を使用して時間について考察した。そして、各慣性座標系の時間は一致していない——等速度運動している質点が静止する慣性座標系の時間は短くなっている。——ことを計算した。

3章では、位置の隔たりおよび速度を時点の隔たりに結び付けて考察した。3章1節の考察では、位置の隔たりおよび時点の隔たりに記述される慣性座標系の速度について考察した。この考察では、‘等速度運動する1つの質点で測定した棒の長さは、その運動方向に収縮する’ことを計算した。さらに、この収縮の式を導出した位置の隔たりおよび2章2節の時点の隔たりの式を使用して、平均変化率を記述した。そして、質点の位置を示す関数の平均変化率が1次元の速度に等しい場合を微分積分学の平均値の定理を使用して説明した。位置の関数の平均変化率を速度に見なすことで、特殊相対性理論で与える運動の制限について考察した。3章2節では、質点を仮定して1次元の速度を定義した後に、3次元の速度を定義した。著者の経験では、質点を仮定しないで座標系上の点の運動から速度を定義している物理学の専門書がある。本書では、座標系上の質点として扱わない点の運動に対応する速度の定義をしない立場を採用して、質点の速度を定義し

た。3章3節では、3章2節で定義した速度を使用して、二つの方法で速度の変換を導出した。3章4節では、その速度の変換を考察した。ローレンツ変換、その速度の変換および相対論的質量から計算できる運動の制限についても考察した。3章4節では、ローレンツ変換およびその速度の変換が、近似の計算ではガリレイ変換およびガリレイ変換の速度の変換に等しい場合を示した。

本書で使用した微分法論は2008年現在の日本で与えられる一般的な微分法論とは異なるものと著者は判断する。本書で使用した微分法論は、著書の経験では日本の大学で行われてきた微分積分学の講義で与える微分法論よりも実践的なものと著者は判断している。速度の変換の導出では、微分法および無限小の知識を使用した。著者の判断では、速度の変換の導出で使用した数学は、日本の大学の電気・電子・情報・通信系の工学科で与えている1年生の微分積分学の知識で計算できる程度である。ただし、一般的な工学系の学科の講義よりも厳密な数学を使用しているものと著者は考えている。

付録iでは2章で説明したローレンツ変換の逆変換を導出した。本書の本文では逆変換を使用して説明をしていない。付録iiでは無限小について説明した。付録iiiでは3章1節で説明した物体の長さの収縮についての説明である。3章1節では、質点を使用して長さの収縮の式を導出した。付録iiiでは、慣性座標系の座標の点を使用して長さの収縮の式を導出した。その際には、2章1節の非同期の話と関連を与えた。付録ivでは反対ベクトルおよび逆ベクトルについて説明した。この付録は、3章2節の速度ベクトルの説明に対する付録である。付録vでは、3章3節で導出した速度の変換の逆変換を導出した。

文献1は、著者がアインシュタインの特殊相対性理論を学んだ本である。本書の全体を作成する際にも参考にした。文献2は特殊相対性理論、一般相対性理論の論文およびそれらに関連する幾つかの論文を英語で記述したものが載っている本として扱われるものである。文献3は物理学の基礎を著者が学んだ本であり、本書の速度、位置の隔たりおよび時点の隔たりについて考える際に参考にした。文献4はインターネット上でダウンロードしたファイルである。本書で使用している真空中の光の速さは文献4に載っていた値である。the Committee on Data for Science and Technologyは1966年にthe International Council for Science——日本語では国際科学会議となる。——の学際的な委員会として設立されたことが文献4に説明されている。the Committee on Data for Science and Technology——日本語では科学技術データ委員会となる。——の略称はCODATAである。2008年現在は、CODATAの表示で文献4のようなファイルが提供されている。そのようなファイルでは基礎定数の値を知ることができる。著者が文献4をダウンロードしたサイトは、National Institute of Standards and Technology——略称はNISTである。——のサイトである。National Institute of Standards and Technology——日本語では国立標準技術研究所となる。——は、the U.S. Department of Commerceに1901年に設立された連邦機関であると、NISTのサイトで説明されている。the U.S. Department of Commerceは、日本語ではアメリカ合衆国商務省となる。ここでの名称は2008年現在のものとして使用した。文献5および文献6は‘反対ベクトル’および‘逆ベクトル’について著者が参考にした本である。文献7ではアインシュタインの特殊相対性理論の4次元での速度ベクトルについて参考にした。

2008年現在の著者の専攻は、循環系の回路モデルである。著者が構築している循環系の回路モデル理論では、電気の回路網の記号を応用した循環系の回路網でヒトの心臓血管系を解析する。その回路網では、著者が独自に定義したコンプライアンス、流れの抵抗およびインダクタを電気回路論のコンデンサ、電気抵抗およびインダクタに対応を与えている。本書は、著者のインターネット上での情報提供活動で使用する——循環系の回路モデルの参考資料でもある。——無償のファイルとして作成している。そのような情報提供活動で使用する循環系の回路モデルの論文および初心者向けの指導書としては次のようなものを著者が作成した。文献8は、約10年間の著者の研究成果——循環系の回路モデルの研究の成果である。——の主な箇所を報告したファイルである。文献16は著者が構築している循環系の回路モデル理論で使用する血流量の定義についての論文である。文献8では著者が構築している循環系の回路モデル理論にコンプライアンスおよ

び流れの抵抗をコンデンサおよびオームの法則に従う電気抵抗に対応を与えている。文献16では、その循環系の回路モデル理論にインダクタを導入して、電気回路論のインダクタに対応を与えた。このインダクタを定義するのに血流量を使用した。この血流量の定義に電気回路論の電流の定義を応用した。ここで使用した電流の定義は、文献14で著者が独自に与えたものである。これらについて、循環系の回路モデルの初心者向けに著者が作成したファイルが文献9～文献11である。これらのファイルは無償である。

文献12は著者が微分積分学を学ぶのに使用した本である。本書の微分法は、ほとんどすべてにおいて文献12の微分法に学んで使用した。既に発行した文献15でも文献12で学んだ微分法を多く導入した。

文献13～文献15は著者が構築している循環系の回路モデル理論で使用した電気の回路論を説明したものである。文献13では光の粒子として扱われる光子について説明をした。光子については本書の3章4節で扱う個所がある。文献14の付録では、本書でも使用している微分法論での微分可能性および線形結合について説明している。線形結合はローレンツ変換に関する事項である。文献15では、真空中の光の速さをマクスウェルの方程式系から導出している。

文献16は著者がアインシュタインの特殊相対性理論のエネルギーおよび質量についての変換式を説明した無償の文献である。文献16では、本書で使用した速度の変換式を使用する。本書の3章4節で説明をした質量についての変換式を文献16で導出した。

本書では‘誤り’がないことを保証はしない。本書の校正の作業は今後も行う予定である。本書の‘誤り’が見つかった際には不定期に改訂を行い発行する予定である。

目次

1	まえがき	1
	目次.....	4
2	特殊相対性理論の時点の微分	5
2.1	慣性座標系 S_1 の時計は慣性座標系 S の時計とは同期が取れていない.	9
2.2	等速度運動している質点が静止している慣性座標系の時間は短くなっている.	12
3	特殊相対性理論の速度の変換式.....	20
3.1	特殊相対性理論の位置の隔たりおよび等速度運動する物体の長さの収縮	20
3.2	速度の定義から考察する位置の微分および時点の微分の関係	32
3.3	速度の変換の導出	40
3.4	特殊相対性理論の速度の変換での運動.....	56
4	あとがき	60
	数学（ベクトルおよび微分法）と逆変換について	61
	付録	61
i.	ローレンツ変換の逆変換	61
ii.	無限小について.....	63
iii.	長さの収縮.....	64
iv.	反対ベクトルおよび逆ベクトル.....	66
v.	速度の変換の逆変換.....	66
	参考文献.....	70
	免責事項.....	70
	著作権	70

2 特殊相対性理論の時点の微分

本書では慣性座標系での議論をする。この慣性座標系は、等速直線運動をする座標系であるものとする。ここの説明では、慣性座標系の区別はその慣性座標系の等速度で与えるものとする。等速直線運動とは、等速度運動を意味する。等速度運動の等速度では速さおよび移動方向は変化をしない。速度は位置の隔たりおよび時点の隔たりを使用して定義する。本書では、位置の差および時点の差をそれぞれ‘位置の隔たり’および‘時点の隔たり’と呼ぶ。速度の定義を使用すると、位置の微分および時点の微分で速度を記述できる。アインシュタインの特殊相対性理論の位置の微分および時点の微分は慣性座標系内の位置および時点を使用して記述する。この特殊相対性理論では、ローレンツ変換を使用して慣性座標系の位置および時点を他方の慣性座標系の位置および時点に変換する。慣性座標系間の変換を与えるローレンツ変換の位置および時点の式は、ニュートンの三つの運動法則で使用されている位置および時点の変換の式とは異なる。

ニュートンの三つの運動法則とは、慣性の法則、運動の法則および作用反作用の法則のことである。ニュートンの三つの運動法則で使用する慣性座標系での物体の長さは、そのすべての慣性座標系で測定しても同じであるものと扱われる。ニュートンの三つの運動法則で使用している時点は絶対時間と呼ばれるもので考えられている。絶対時間は外部からの影響を受けない時間である。この絶対時間の解釈から、座標系が如何なる速度で移動していても絶対時間には影響を与えることはないものと仮定されている。そして、この絶対時間を使用した時点を他の慣性座標系の時点に変換しても、如何なる変化も生じないものとなる。時計で時点を表すものとする、すべての慣性座標系内のそれぞれの位置に対応する時計の表す時点はすべて同じである。このことから、慣性座標系のそれぞれの位置にそれぞれの時計を考える必要はない。ニュートンの三つの運動法則で使用している慣性座標系では、物体の長さおよび時計の表す時点はすべての慣性座標系で同じものとなる。このような慣性座標系では速さは無限大までも計算可能である。

一方、アインシュタインの特殊相対性理論で使用するローレンツ変換では次のようになる。1つの慣性座標系上で静止している物体の長さは他の慣性座標系のもつ等速度方向の空間の成分で記述することで収縮する。また、アインシュタインの特殊相対性理論で使用する時点は、慣性座標系間の変換では他方の慣性座標系の位置および時点の影響を受けるものである。このことから、1つの慣性座標系内のそれぞれの位置にそれぞれの時計——この時計で時点を表すものとする。——を考えることになる。ローレンツ変換では慣性座標系の速さを真空中の光の速さ以上にならないものと一般に解釈される。そして、アインシュタインの特殊相対性理論で使用する慣性座標系で使用する質点の速さは、真空中の光の速さ以上にならないものと一般に解釈される。

上述のように、ニュートンの三つの運動法則で使用されている位置および時点の変換はローレンツ変換とは異なる。このニュートンの三つの運動法則の変換で使用されている位置の微分および時点の微分はローレンツ変換のものとは異なる。これらの微分が異なることで、速度の変換の記述が異なるものとなる。2章では時点の微分について考察する。3章では位置の微分について説明して、アインシュタインの特殊相対性理論で使用する速度の変換を考察する。

ローレンツ変換は、アインシュタインの特殊相対性理論の公理を使用して導出できる。特殊相対性理論の公理は‘特殊相対性原理’および‘光速の不変の原理’で与える二つである。

特殊相対性原理：すべての慣性座標系で、物理法則は同じである。

光速の不変の原理：すべての慣性座標系で、真空中の光の速さは同じ値である。

‘特殊相対性原理’および‘光速の不変の原理’から、特殊相対性理論で使用する慣性座標系の位置および時点の関係を与えることになる。

本書では慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 を使用する。慣性座標系 S の空間の成分は (2.1) の記号を使用する。慣性

座標系 S の時点の成分は (2.2) の記号を使用する. そして, 慣性座標系 S_1 の空間の成分は (2.3) の記号を使用する. 慣性座標系 S_1 の時点の成分は (2.4) の記号を使用する.

$$x, y, z \dots (2.1)$$

$$t \dots (2.2)$$

$$x_1, y_1, z_1 \dots (2.3)$$

$$t_1 \dots (2.4)$$

慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度を (2.5) で記述する. (2.5) は x_1 軸の方向の等速度である. また, 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S_1 の等速度を (2.6) で記述する. (2.6) は x 軸方向の等速度である. 図 2.1 に慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 の関係を示している.

$$\mathbf{u}_{S_1 S} = -u\mathbf{i}_1, (u = \text{const.}) \dots (2.5) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ の } x_1 \text{ 成分および } t_1 \text{ 成分で記述した慣性座標系 } S \text{ の等速度}$$

$$\mathbf{u}_{S S_1} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \dots (2.6) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の } x \text{ 成分および } t \text{ 成分で記述した慣性座標系 } S_1 \text{ の等速度}$$

慣性座標系 S の x 軸および慣性座標系 S_1 の x_1 軸は同じ直線上にあるものと仮定する. (2.5) および (2.6) の右辺のベクトルはそれぞれ x_1 軸および x 軸の単位ベクトルである.

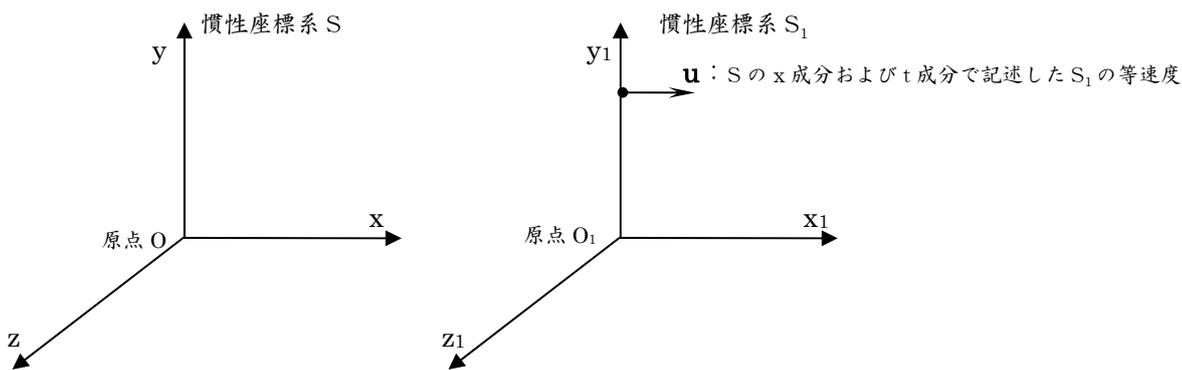


図 2.1 慣性座標系

アインシュタインの特殊相対性理論で使用する慣性座標系は, ニュートンの三つの運動法則で使用されている慣性座標系とは異なる. アインシュタインの特殊相対性理論で使用する慣性座標系 S では光速の不変の原理を使用した関係式 (2.7) および (2.8) を満足する. また, アインシュタインの特殊相対性理論で使用する慣性座標系 S_1 では光速の不変の原理を使用した関係式 (2.9) および (2.10) を満足する. 慣性座標系 S の原点 O および慣性座標系 S_1 の原点 O_1 が一致しているときは (2.8) および (2.10) が成立することを仮定している. そして, (2.8) および (2.9) が成立しているときに, 慣性座標系 S の原点 O および慣性座標系 S_1 の原点 O_1 に, 光源を仮定する. その光源から放射された光の球面の方程式として, (2.7) および (2.9) を記述できる.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2 \dots (2.7)$$

$$(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) \dots (2.8) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の空間および時点の成分で与えた座標}$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c^2 \cdot t_1^2 \dots (2.9)$$

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) = (0, 0, 0, 0) \dots (2.10) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ の空間および時点の成分で与えた座標}$$

慣性座標系の原点を光源とした光の球面の方程式 (2.7) および (2.9) は特殊相対性原理および光速の不変の原理を満足する. (2.7) および (2.9) の右辺には真空中の光の速さ (2.11) を記述している. CODATA の (2.11) の値は (2.12) と

なっている.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \epsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \dots (2.11)$$

$$c = 299\,792\,458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \dots (2.12)$$

アインシュタインの特殊相対性理論で使用する慣性座標系では, (2.7) および (2.9) から (2.13) を不変の関係とする. 特殊相対性原理, 光速の不変の原理および不変の関係式 (2.13) を使用してローレンツ変換を導出できる. 導出できたローレンツ変換から, アインシュタインの特殊相対性理論で使用する慣性座標系の速さは (2.5) および (2.6) で $0 \leq |u| < c$ を満足する. $0 \leq |u| < c$ では有限の速さになる真空中の光の速さ (2.11) を記述している. 図 2.2 に簡単な説明を示している.

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 \cdot t_1^2 \dots (2.13)$$

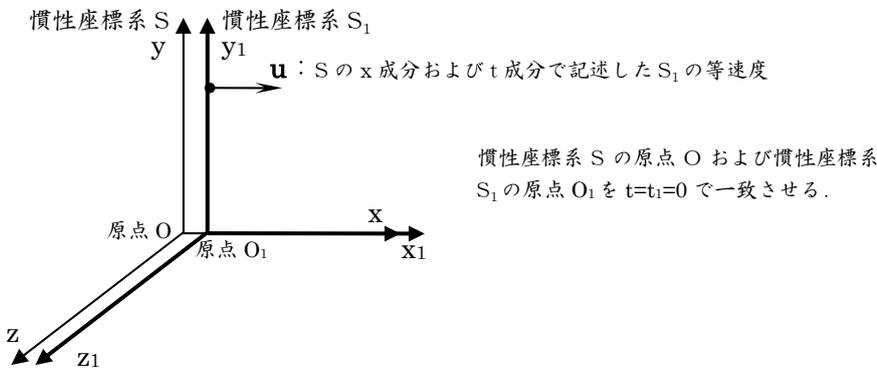


図 2.2 アインシュタインの特殊相対性理論での慣性座標系

真空中の光の速さ (2.11) は波動方程式 (2.14) および波動方程式 (2.15) から得られる. (2.14) の (2.16) は電場ベクトルを意味する. (2.15) の (2.17) は磁束密度ベクトルを意味する. 波動方程式 (2.14) および波動方程式 (2.15) の真空中の光の速さ (2.11) は定数である. 定数である真空中の光の速さ (2.11) はそれぞれの慣性座標系上では同じ値 (2.11) となる. このことを光速の不変の原理でアインシュタインの特殊相対性理論の公理として与えている. (2.14) および (2.15) の導出の方法は文献 14 で与えている.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \dots (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \dots (2.15)$$

$$\mathbf{E} \dots (2.16)$$

$$\mathbf{B} \dots (2.17)$$

(2.18) ~ (2.21) はローレンツ変換——特殊ローレンツ変換と呼ばれることもある.——である. ローレンツ変換の (2.18) は慣性座標系 S₁ の x₁ 軸上の値が慣性座標系 S の x 軸上の値および t 軸上の値に関係を持つことを示している. ローレンツ変換の (2.19) は慣性座標系 S₁ の y₁ 軸上の値が慣性座標系 S の y 軸上の値に等しいことを示している. ローレンツ変換の (2.20) は慣性座標系 S₁ の z₁ 軸上の値が慣性座標系 S の z 軸上の値に等しいことを示している. ローレン

ツ変換の (2.21) は慣性座標系 S_1 の t_1 軸上の値が慣性座標系 S の x 軸上の値および t 軸上の値に関係を持つことを示している。ただし、ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) では (2.22) を仮定している。一般には、(2.22) は (2.23) を満足し区間 (2.24) で定義されている。(2.24) の区間に対する (2.22) の値は (2.25) になる。慣性座標系 S の座標 (2.8) および慣性座標系 S_1 の座標 (2.10) を使用すると、ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) は不変の式となる (2.13) を満足することは明らかである。ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) の逆変換を付録 i で導出した。ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) は線形結合で記述しているものと解釈できる。数学的な線形結合についての説明は文献 14 の付録で説明している。

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \dots (2.18)$$

$$y_1 = y \dots (2.19)$$

$$z_1 = z \dots (2.20)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \dots (2.21)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \dots (2.22)$$

$$u \neq c \dots (2.23)$$

$$-c < u < c \dots (2.24)$$

$$1 \leq \gamma < \infty \dots (2.25)$$

アインシュタインの特殊相対性理論の慣性座標系では次のように時計を考える。1つの慣性座標系内のそれぞれの位置に1つの時計が対応するものとする。その時計で時刻を表す。1つの慣性座標系内のそれぞれの時計は同期しており、時刻が一致する。しかし、時点の式 (2.21) では、慣性座標系 S_1 の時計は慣性座標系 S の時計とは同期していない。このことは、慣性座標系 S_1 の時計で表す時点の隔たりは慣性座標系 S の時計で表す時点の隔たりとは一致していないことを意味する。この不一致については2章1節および2章2節で説明する。ただし、ここでは慣性座標系内の位置は空間の位置となる (x, y, z) および (x_1, y_1, z_1) で示すものとする。

慣性座標系 S の x 軸の変数に対して (2.26) を仮定する。(2.26) を (2.21) の右辺に代入すると、(2.27) になる。慣性座標系 S_1 の t_1 (2.27) は慣性座標系 S の t 軸の変数 t を独立変数とする関数である。

$$x = x(t) \dots (2.26)$$

$$t_1(t) = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x(t)}{c^2} \right) \dots (2.27)$$

(2.27) の微分係数を (2.28) で記述する。微分係数 (2.28) を使用して慣性座標系 S_1 の時点の微分 (2.29) を定義する。慣性座標系 S_1 の時点の微分 (2.29) の (2.30) は慣性座標系 S の t 軸上に在る時点の隔たりである。時点の微分 (2.29) は (2.30) を独立変数とする1変数 (2.30) についての関数である。時点の微分 (2.29) では微分係数 (2.28) は変数 (2.30) についての関数 (2.29) の傾きを意味する。傾き (2.28) は定数である。慣性座標系 S_1 の時点の微分 (2.29) のグラフは線形のグラフになる。このことから、慣性座標系 S の t 軸上にある時点 t の値を決定することで、慣性座標系 S_1 の時点の微分 (2.29) で描くグラフの傾き (2.28) は決定する。微分係数 (2.28) を使用して、3章3節では無限小を導入した計算を行う。無限小については、付録 ii で説明した。

$$t_1'(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (2.28)$$

$$dt_1(t) \equiv t_1'(t) \cdot h \dots (2.29) \quad (\text{一変数}) \text{ 変数 } h \text{ についての関数}$$

$$h \dots (2.30)$$

慣性座標系 S の t 軸上にある時点 t に (2.31) の関数を仮定する. 関数 (2.31) に微分係数 (2.32) を仮定する. 微分係数 (2.32) を使用して慣性座標系 S の時点の微分 (2.33) を定義する. 関数 (2.31) および慣性座標系 S の時点の微分 (2.33) から (2.34) を記述できる. 慣性座標系 S の時点の微分 (2.34) は慣性座標系 S の t 軸上にある時点の隔たりである. 慣性座標系 S の時点の隔たりである慣性座標系 S の時点の微分 (2.34) は (2.30) を独立変数とする 1 変数 (2.30) についての関数である. そして, 慣性座標系 S の時点の微分 (2.34) で描くグラフは傾き (2.32) の線形のグラフである.

$$f(t) = t \dots (2.31)$$

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t+h-t}{h} = 1 \dots (2.32)$$

$$df(t) = f'(t) \cdot h = 1 \cdot h = h \dots (2.33)$$

$$dt = h \dots (2.34)$$

慣性座標系 S の時点の微分 (2.34) を慣性座標系 S₁ の時点の微分 (2.29) の右辺に代入すると慣性座標系 S₁ の時点の微分 (2.35) を記述できる. 慣性座標系 S₁ の時点の微分 (2.35) で慣性座標系 S の t 軸上にある時点の隔たり (2.36) が成立する場合は, 微分係数 (2.37) を記述できる. 微分係数 (2.37) の右辺は (2.28) の左辺である.

$$dt_1(t) = t_1'(t) \cdot dt \dots (2.35)$$

$$dt \neq 0 \dots (2.36)$$

$$\frac{dt_1(t)}{dt} = t_1'(t) \dots (2.37)$$

2.1 慣性座標系 S₁ の時計は慣性座標系 S の時計とは同期が取れていない.

2 章で慣性座標系の各位置に時計を仮定した. それらの時計の表す時点およびそれらの時計の在る空間の位置を使用して 4 次元の座標を与えることができる. その 4 次元の座標の各成分はローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) を使用して与えることになる.

2 章 1 節および 2 章 2 節では, 慣性座標系内に仮定した時計について説明する. そして, 3 章 1 節ではそれらの時計の在る空間の位置の隔たりについて説明する. 3 章 1 節では質点を導入して, その位置の隔たりおよび時点の隔たりで, その質点の位置を示す関数の平均変化率と速度の関係について説明する. 2 章 1 節では質点は導入しないで, 座標の点のみの計算で時計の非同期について考察する.

慣性座標系 S₁ の座標 (2.1.1) を仮定する. 慣性座標系 S₁ の座標 (2.1.1) に対応する慣性座標系 S の座標 (2.1.2) を仮定する. 同様に, 慣性座標系 S₁ の座標 (2.1.3) を仮定する. 慣性座標系 S₁ の座標 (2.1.3) に対応する慣性座標系 S の座標 (2.1.4) を仮定する.

$$(x_{1m}, y_{1m}, z_{1m}, t_{1m}) \dots (2.1.1)$$

$$(x_m, y_m, z_m, t_m) \dots (2.1.2)$$

$$(x_{1n}, y_{1n}, z_{1n}, t_{1n}) \dots (2.1.3)$$

$$(x_n, y_n, z_n, t_n) \dots (2.1.4)$$

ローレンツ変換の (2.21) を使用して、慣性座標系 S_1 の座標 (2.1.1) の時点 (2.1.5) で記述する。同様に、慣性座標系 S_1 の座標 (2.1.3) の時点 (2.1.6) で記述する。

$$t_{1m} = \gamma \cdot \left(t_m - \frac{u \cdot x_m}{c^2} \right) \dots (2.1.5)$$

$$t_{1n} = \gamma \cdot \left(t_n - \frac{u \cdot x_n}{c^2} \right) \dots (2.1.6)$$

慣性座標系 S の x 軸上での位置の隔たりを (2.1.7) で記述する。慣性座標系 S の t 軸上での時点の隔たりを (2.1.8) で記述する。慣性座標系 S_1 の t_1 軸上での時点の隔たりを (2.1.9) で記述する。

$$\Delta x_{mn} \equiv x_m - x_n \dots (2.1.7) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の位置の隔たり}$$

$$\Delta t_{mn} \equiv t_m - t_n \dots (2.1.8) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の時点の隔たり}$$

$$\Delta t_{1mn} \equiv t_{1m} - t_{1n} \dots (2.1.9) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ の時点の隔たり}$$

時点の隔たり (2.1.9) の右辺に時点 (2.1.5) および時点 (2.1.6) を代入して、(2.1.7) および (2.1.8) を使用してまとめると時点の隔たり (2.1.10) を記述できる。慣性座標系 S の‘位置の隔たり (2.1.7)’、‘時点の隔たり (2.1.8)’ および慣性座標系 S_1 の等速度 (2.6) の成分で、慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.10) が決定する。慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.8) は慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.10) とは一致していない。

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \right) \dots (2.1.10)$$

$$\mathbf{u}_{S_1 S} = \mathbf{u}i, (u = \text{const.}) \dots (2.6) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の } x \text{ 成分および } t \text{ 成分で記述した慣性座標系 } S_1 \text{ の等速度}$$

時点の隔たり (2.1.9) に (2.1.11) を仮定する。(2.1.11) の場合は、慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.9) から慣性座標系 S_1 の時点 (2.1.12) になる。次に、慣性座標系 S の位置の隔たり (2.1.13) および慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.14) を仮定する。慣性座標系 S の位置の隔たり (2.1.7) を使用すると、(2.1.13) では慣性座標系 S の位置の関係 (2.1.15) になる。慣性座標系 S の位置の関係 (2.1.15) では、(2.1.15) の左辺の時計は、(2.1.15) の右辺の時計とは異なる時計である。

$$\Delta t_{1mn} = 0 \dots (2.1.11) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ の時点の隔たりの仮定}$$

$$t_{1m} = t_{1n} \dots (2.1.12)$$

$$\Delta x_{mn} \neq 0 \dots (2.1.13) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の位置の隔たりの仮定}$$

$$\Delta t_{mn} \neq 0 \dots (2.1.14) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の時点の隔たりの仮定}$$

$$x_m \neq x_n \dots (2.1.15) \text{ 慣性座標系 } S \text{ 内の 2 箇所に対応する時計を使用する。——二つの時計はそれぞれ異なる。——}$$

慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.11) を慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.10) の左辺に代入すると、(2.1.16) になる。慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.16) から慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.17) を導出できる。慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.17) は、慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.11) に対応する慣性座標系 S の時点の隔たりである。

$$0 = \gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{mn} \dots (2.1.16)$$

$$\Delta t_{mn} = \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \dots (2.1.17)$$

慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.17) は (2.1.18) を満足する。慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.18) は仮定 (2.1.14) に一致する。(2.1.18) の場合は、慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.8) を使用すると慣性座標系 S の時点の関係 (2.1.19)

になる.

$$\Delta t_{mn} = \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \neq 0 \dots (2.1.18)$$

$$t_m \neq t_n \dots (2.1.19)$$

ローレンツ変換の (2.1.18) を使用して, 慣性座標系 S_1 の座標 (2.1.1) の x_1 成分 (2.1.20) を記述する. 同様に, 慣性座標系 S_1 の座標 (2.1.3) の x_1 成分 (2.1.21) を記述する.

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \dots (2.1.18)$$

$$x_{1m} = \gamma \cdot (x_m - u \cdot t_m) \dots (2.1.20)$$

$$x_{1n} = \gamma \cdot (x_n - u \cdot t_n) \dots (2.1.21)$$

慣性座標系 S_1 の時点 (2.1.12) で (2.1.22) を仮定する. 慣性座標系 S_1 内の時点 (2.1.5) および (2.1.22) を使用して 慣性座標系 S_1 内の時点 (2.1.23) を記述する. 慣性座標系 S_1 内の時点 (2.1.23) を使用して, (2.1.24) に記述できる.

(2.1.24) は慣性座標系 S 内の時点 (2.1.25) に書き直せる.

$$t_{1m} = t_{1n} = t_{1c} \dots (2.1.22)$$

$$t_{1m} = \gamma \cdot \left(t_m - \frac{u \cdot x_m}{c^2} \right) \dots (2.1.5)$$

$$t_{1c} = \gamma \cdot \left(t_m - \frac{u \cdot x_m}{c^2} \right) \dots (2.1.23)$$

$$t_m - \frac{u \cdot x_m}{c^2} = \frac{t_{1c}}{\gamma} \dots (2.1.24)$$

$$t_m = \frac{t_{1c}}{\gamma} + \frac{u \cdot x_m}{c^2} \dots (2.1.25)$$

慣性座標系 S 内の時点 (2.1.25) を慣性座標系 S_1 内の位置 (2.1.20) の右辺に代入すると, (2.1.26) になる. 慣性座標系 S_1 内の位置 (2.1.26) の右辺は (2.1.27) に記述できる. 慣性座標系 S_1 内の位置 (2.1.27) は (2.1.28) に記述できる. 慣性座標系 S_1 内の位置 (2.1.28) は (2.1.29) にまとめることができる.

$$x_{1m} = \gamma \cdot x_m - \gamma \cdot u \cdot \left(\frac{t_{1c}}{\gamma} + \frac{u \cdot x_m}{c^2} \right) \dots (2.1.26)$$

$$x_{1m} = \gamma \cdot x_m - u \cdot t_{1c} - \gamma \cdot \frac{u^2 \cdot x_m}{c^2} \dots (2.1.27)$$

$$x_{1m} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \cdot x_m - u \cdot t_{1c} \dots (2.1.28)$$

$$x_{1m} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot x_m - u \cdot t_{1c} \dots (2.1.29) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ 内の位置 } (x_{1m}, y_{1m}, z_{1m}) \text{ の時計で時点 (2.1.22) を表す.}$$

慣性座標系 S_1 内の時点 (2.1.6) および (2.1.22) を使用すると, 慣性座標系 S_1 内の時点 (2.1.30) を記述できる. 慣性座標系 S_1 内の時点 (2.1.30) は慣性座標系 S 内の時点 (2.1.31) に書き直すことができる. 慣性座標系 S_1 内の位置 (2.1.21) の右辺に (2.1.31) を代入すると, (2.1.32) を記述できる. 慣性座標系 S_1 内の位置 (2.1.32) は (2.1.33) にまとめることができる.

$$t_{1n} = \gamma \cdot \left(t_n - \frac{u \cdot x_n}{c^2} \right) \dots (2.1.6)$$

$$t_{1c} = \gamma \cdot \left(t_n - \frac{u \cdot x_n}{c^2} \right) \dots (2.1.30)$$

$$t_n = \frac{t_{1c}}{\gamma} + \frac{u \cdot x_n}{c^2} \dots (2.1.31)$$

$$x_{1n} = \gamma \cdot x_n - \gamma \cdot u \cdot \left(\frac{t_{1c}}{\gamma} + \frac{u \cdot x_n}{c^2} \right) \dots (2.1.32)$$

$$x_{1n} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot x_n - u \cdot t_{1c} \dots (2.1.33)$$

慣性座標系 S 内の位置の関係 (2.1.15) の場合は, (2.1.29) および (2.1.33) では慣性座標系 S₁ 内の位置の関係 (2.1.34) になる. 慣性座標系 S₁ 内の (2.1.34) の左辺の位置に対応する時計は (2.1.34) の右辺の位置に対応する時計とは異なる. 慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.1.11) は慣性座標系 S₁ 内の (2.1.34) の左辺および右辺のそれぞれの異なる二つの時計で表したものである.

$x_{1m} \neq x_{1n} \dots (2.1.34)$ 慣性座標系 S₁ 内の 2 箇所に対応する時計を使用する. ——二つの時計はそれぞれ異なる. ——

慣性座標系 S₁ の時点の隔たりが零である (2.1.11) の場合は, 慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.18) の左辺は零ではない. 慣性座標系 S₁ の位置 (2.1.29) および位置 (2.1.33) で時点 (2.1.22) のときに同時に生じた出来事 A を仮定する. 慣性座標系 S では (2.1.15) の両辺の異なる位置でそれぞれの位置に対応する (2.1.19) の両辺の異なる時点のときに, この出来事 A は生じる.

$\Delta t_{1mn} = 0 \dots (2.1.11)$ 慣性座標系 S₁ の時点の隔たりの仮定

$$\Delta t_{mn} = \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \neq 0 \dots (2.1.18)$$

$$t_{1m} = t_{1n} = t_{1c} \dots (2.1.22)$$

$$x_m \neq x_n \dots (2.1.15)$$

$$t_m \neq t_n \dots (2.1.19)$$

慣性座標系 S の位置の隔たり (2.1.13) の左辺が大きくなると, 慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.18) の左辺は大きくなる. 逆に, 慣性座標系 S の位置の隔たり (2.1.13) の左辺が小さくなると, 慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.18) の左辺は小さくなる. このことは, 慣性座標系 S₁ の時計は慣性座標系 S の時計とは同期が取れていないことを意味する.

$$\Delta x_{mn} \neq 0 \dots (2.1.13)$$

2.2 等速度運動している質点が静止している慣性座標系の時間は短くなっている.

慣性座標系 S₁ の時点 (2.1.5) の右辺に記述した慣性座標系 S の位置を (2.2.1) のように記述する. (2.2.1) は慣性座標系 S 内の質点の位置を示す関数である. 同様に, 慣性座標系 S₁ の時点 (2.1.6) の右辺に記述した慣性座標系 S の位置を (2.2.2) のように記述する. (2.2.2) は慣性座標系 S の質点の位置を示す関数である.

$$t_{1m} = \gamma \cdot \left(t_m - \frac{u \cdot x_m}{c^2} \right) \dots (2.1.5)$$

$$x_m = x(t_m) \dots (2.2.1)$$

$$t_{1n} = \gamma \cdot \left(t_n - \frac{u \cdot x_n}{c^2} \right) \dots (2.1.6)$$

$$x_n = x(t_n) \dots (2.2.2)$$

慣性座標系 S 内の質点の位置 (2.2.1) に対応する慣性座標系 S₁ 内の質点の位置を関数 (2.2.3) で記述する. 同様に,

慣性座標系 S 内の質点の位置 (2.2.2) に対応する慣性座標系 S₁ 内の質点の位置を関数 (2.2.4) で記述する.

$$x_{1m} = x_1(t_{1m}) \cdots (2.2.3)$$

$$x_{1n} = x_1(t_{1n}) \cdots (2.2.4)$$

慣性座標系 S 内の質点の位置 (2.2.1) および位置 (2.2.2) を使用した慣性座標系 S の x 成分での位置の隔たりを (2.2.5) で記述する. 慣性座標系 S の t 成分での時点の隔たりを (2.1.8) で記述する. 慣性座標系 S₁ の t₁ 軸上での時点の隔たりを (2.1.9) で記述する.

$$\Delta x_{f_{mn}} \equiv x_m - x_n \cdots (2.2.5) \text{位置の隔たり}$$

$$\Delta t_{mn} \equiv t_m - t_n \cdots (2.1.8) \text{時点の隔たり}$$

$$\Delta t_{1mn} \equiv t_{1m} - t_{1n} \cdots (2.1.9) \text{時点の隔たり}$$

慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.1.9) の右辺に慣性座標系 S₁ の時点 (2.1.5) および時点 (2.1.6) を代入して, 慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.8) および位置の隔たり (2.2.5) を使用してまとめると慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.6) を記述できる. 慣性座標系 S₁ の等速度 (2.6), 慣性座標系 S の位置の隔たり (2.2.5) および時点の隔たり (2.1.8) で, 慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.6) が決定する. 慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.8) は慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.6) とは一致していない.

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f_{mn}} \right) \cdots (2.2.6) \text{二つの慣性座標系間ではそれぞれの時点の隔たりが一致していない.}$$

$$\mathbf{u}_{S_1-S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \cdots (2.6) \text{慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S₁ の等速度}$$

慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.6) は (2.2.7) に書き直すことができる. 慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.7) の右辺の第一項には (2.2.8) を記述している. 慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.7) の右辺の第二項には (2.2.9) を記述している. (2.2.8) は慣性座標系 S の時点の隔たりよりも γ で大きくなる. (2.2.9) は慣性座標系 S の位置の隔たりよりも γ で大きくなる. (2.2.8), (2.2.9) および慣性座標系 S₁ の等速度 (2.6) の成分を与えることで, 慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.7) の左辺は決定する.

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{f_{mn}} \cdots (2.2.7)$$

$$\gamma \cdot \Delta t_{mn} \cdots (2.2.8) \text{慣性座標系 S の時点の隔たりよりも } \gamma \text{ で大きくなる.}$$

$$\gamma \cdot \Delta x_{f_{mn}} \cdots (2.2.9) \text{慣性座標系 S の位置の隔たりよりも } \gamma \text{ で大きくなる.}$$

$$\mathbf{u}_{S_1-S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \cdots (2.6) \text{慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S₁ の等速度}$$

(2.2.7) の右辺の第一項および第二項を考察することで, 特殊相対性理論で使用している時計について知ることができる. ここで, (2.2.7) の右辺の第一項および第二項を考察する前に, 慣性座標系内で静止している時計と移動している時計の位置について考察する.

慣性座標系 S 内で, (2.2.10) の左辺の時点で (2.2.11) の左辺の位置に在る質点が (2.2.10) の右辺の時点で (2.2.11) の右辺の位置に在るものとする. この場合は, この質点が慣性座標系 S 内で移動したものと解釈できる. 特殊相対性理論では, この質点の在る慣性座標系 S 内の各位置にそれぞれ異なる時計が存在することを仮定している. このことから, 慣性座標系 S 内での (2.2.11) の左辺の時計で表した時点は (2.2.10) の左辺の時点である. 慣性座標系 S 内での (2.2.11) の右辺の時計で表した時点は (2.2.10) の右辺の時点である.

$$t_m \neq t_n \cdots (2.2.10)$$

$$x(t_m) \neq x(t_n) \cdots (2.2.11) \text{慣性座標系 S 内の x 成分になる異なる 2 点}$$

同様に、慣性座標系 S_1 内で、(2.2.12) の左辺の時点で (2.2.13) の左辺の位置に在る質点が (2.2.12) の右辺の時点で (2.2.13) の右辺の位置に在るものとする。この場合は、この質点が慣性座標系 S_1 内で移動したものと解釈できる。特殊相対性理論では、この質点の在る慣性座標系 S_1 内の各位置にそれぞれ異なる時計が存在することを仮定している。このことから、慣性座標系 S_1 内での (2.2.13) の左辺の時計で表した時点は (2.2.12) の左辺の時点である。慣性座標系 S_1 内での (2.2.13) の右辺の時計で表した時点は (2.2.12) の右辺の時点である。

$$t_m \neq t_n \cdots (2.2.12)$$

$$x_1(t_m) \neq x_1(t_n) \cdots (2.2.13) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ 内の } x_1 \text{ 成分になる異なる 2 点}$$

(2.2.10) および (2.2.12) の両辺の時点はそれぞれの慣性座標系内の異なる 2 箇所に対応する異なる二つの時計で表した時点である。次に、それぞれの慣性座標系内で静止している場合の時計およびその時計の移動について考える。

慣性座標系 S 内の 1 点に静止している質点は慣性座標系 S_1 内では移動していることになる。逆に、慣性座標系 S_1 内の 1 点に静止している質点は慣性座標系 S 内では移動していることになる。

そして、この質点の在る慣性座標系 S 内の各位置にそれぞれ異なる時計が存在する。このことから、(2.2.14) の左辺の時点および右辺の時点は、慣性座標系 S 内の位置 (2.2.14) に対応する時計と同じ時計で表した時点である。同様に、この質点の在る慣性座標系 S_1 内の各位置にそれぞれ異なる時計が存在する。このことから、(2.2.15) の左辺の時点および右辺の時点は、慣性座標系 S_1 内の位置 (2.2.15) に対応する時計と同じ時計で表した時点である。

$$x(t_m) = x(t_n) \cdots (2.2.14) \text{ 慣性座標系 } S \text{ 内の } x \text{ 成分になる 1 点}$$

$$x_1(t_m) = x_1(t_n) \cdots (2.2.15) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ 内の } x_1 \text{ 成分になる 1 点}$$

位置 (2.2.14) は (2.2.10) および (2.2.16) の両方の場合で考えることができる。同様に、位置 (2.2.15) は (2.2.12) および (2.2.17) の両方の場合で考えることができる。

$$t_m = t_n \cdots (2.2.16)$$

$$t_m = t_n \cdots (2.2.17)$$

ここまでで、(2.2.6) および (2.2.7) の考察に必要な‘質点の位置およびその位置の時計’の関係についての説明を終了する。次に、(2.2.7) の右辺の第一項および第二項を考察する。

(2.2.7) で慣性座標系 S の時点の隔たりが (2.2.18) の場合を考える。慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.8) を使用すると、(2.2.18) から、慣性座標系 S の時点 (2.2.19) が成立する。(2.2.19) が成立するならば、質点の位置を示す関数 (2.2.1) および (2.2.2) から位置の関係 (2.2.20) が成立する。慣性座標系 S の位置 (2.2.20) が成立する場合は、慣性座標系 S の位置の隔たり (2.2.5) から慣性座標系 S の位置 (2.2.21) になる。(2.2.20) では、慣性座標系 S 内の位置 (2.2.20) の 1 つの時計で時点 (2.2.19) を表していることになる。慣性座標系 S の時点の隔たり (2.2.18) および慣性座標系 S の位置の隔たり (2.2.21) を慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.2.6) に代入すると (2.2.22) が成立する。

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{f mn} \cdots (2.2.7)$$

$$\Delta t_{mn} = 0 \cdots (2.2.18)$$

$$t_m = t_n \cdots (2.2.19)$$

$$x(t_m) = x(t_n) \cdots (2.2.20) \text{ 慣性座標系 } S \text{ 内の 1 箇所に対応する 1 つの時計を使用する。}$$

$$\Delta x_{f mn} = 0 \cdots (2.2.21)$$

$$\Delta t_{1mn} = 0 \cdots (2.2.22)$$

(2.2.22) を使用すると、慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.9) から (2.2.23) を記述できる。慣性座標系 S_1 の位置 (2.2.3)

および慣性座標系 S_1 の位置 (2.2.4) を使用すると, (2.2.23) の場合は質点の位置の関係 (2.2.24) になる. (2.2.24) では, 慣性座標系 S_1 内の位置 (2.2.24) の 1 つの時計で時点 (2.2.23) を表していることになる.

$$t_{1m} = t_{1n} \cdots (2.2.23)$$

$x_1(t_{1m}) = x_1(t_{1n}) \cdots (2.2.24)$ 慣性座標系 S_1 内の 1 箇所に対応する 1 つの時計を使用する.

慣性座標系 S の時点の隔たり (2.2.18) の場合は, (2.2.6) および (2.2.7) は慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.2.22) になる. このことでは, (2.2.6) および (2.2.7) では慣性座標系 S 内の 1 箇所に在る質点の位置 (2.2.20) で同時に生じた出来事は, 慣性座標系 S_1 内の 1 箇所に在る質点の位置 (2.2.24) で同時に生じる.

一方, 2 章 1 節で考察した (2.1.10) では, 慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.11) および慣性座標系 S の位置の隔たり (2.1.15) が成立する場合は, (2.1.18) になる. 時点の隔たり (2.1.11) は, (2.1.34) の両辺の異なる位置の異なる時計で表した時点の隔たりである. 慣性座標系の 4 次元の座標のみで導出した (2.1.10) では, 質点の位置を示す関数で導出した (2.2.6) および (2.2.7) とは次のように異なる. 慣性座標系 S_1 内での (2.1.34) の両辺の異なる位置で同時に, 出来事 A は生じたものと仮定する. 慣性座標系 S 内での (2.1.15) の両辺の異なる位置で時点の隔たり (2.1.18) を経て出来事 A は生じる. 慣性座標系 S_1 内で同時に生じた出来事 A は慣性座標系 S 内では同時に生じてはいない.

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \right) \cdots (2.1.10)$$

$$\Delta t_{1mn} = 0 \cdots (2.1.11)$$

$x_m \neq x_n \cdots (2.1.15)$ 慣性座標系 S 内の 2 箇所に対応する異なる時計を使用する.

$$\Delta t_{mn} = \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \neq 0 \cdots (2.1.18)$$

$x_{1m} \neq x_{1n} \cdots (2.1.34)$ 慣性座標系 S_1 内の 2 箇所に対応する異なる時計を使用する. ——位置の関係——

慣性座標系 S の位置の隔たり (2.2.25) が成立する場合は, (2.2.5) から慣性座標系 S の位置 (2.2.26) になる. 慣性座標系 S 内の位置 (2.2.26) の時計で表す時点の隔たりを (2.2.27) で仮定する. (2.2.27) の場合は, (2.1.8) から慣性座標系 S の時点の関係 (2.2.28) になる. 慣性座標系 S_1 内の時点の隔たりを (2.2.29) で仮定する. (2.2.29) の場合は, (2.1.9) から慣性座標系 S_1 の時点の関係 (2.2.30) になる.

$$\Delta x_{f_{mn}} = 0 \cdots (2.2.25)$$

$x(t_m) = x(t_n) \cdots (2.2.26)$ 慣性座標系 S 内の 1 箇所に対応する 1 つの時計を使用する.

$\Delta t_{mn} \neq 0 \cdots (2.2.27)$ 慣性座標系 S 内の時点の隔たりの仮定

$t_m \neq t_n \cdots (2.2.28)$ 慣性座標系 S 内の時点の関係

$\Delta t_{1mn} \neq 0 \cdots (2.2.29)$ 慣性座標系 S_1 内の時点の隔たりの仮定

$t_{1m} \neq t_{1n} \cdots (2.2.30)$ 慣性座標系 S_1 内の時点の関係

慣性座標系 S の質点の位置を示す関数 (2.2.26) に (2.2.31) を仮定する——図 2.1 に簡単な説明を与えた. ——. 慣性座標系 S の位置 (2.2.31) を使用すると, ローレンツ変換の (2.18) から (2.2.32) および (2.2.33) を記述できる. 慣性座標系 S 内の時点の関係 (2.2.28) が成立する場合は, (2.2.32) および (2.2.33) から慣性座標系 S_1 内の位置の関係 (2.2.34) になる——図 2.2 に簡単な説明を与えた. ——. 慣性座標系 S_1 内での (2.2.34) の左辺の時計は, (2.2.34) の右辺の時計とは異なる. 慣性座標系 S_1 内の時点の関係 (2.2.30) から, (2.2.34) の左辺の時計で表す時点は (2.2.34) の右辺の時計で表す時点とは異なることになる.

$$x(t_m) = x(t_n) = x_c \cdots (2.2.31)$$

$$x_{1m} = \gamma \cdot (x_c - u \cdot t_m) \cdots (2.2.32)$$

$$x_{1n} = \gamma \cdot (x_c - u \cdot t_n) \dots (2.2.33)$$

$x_1(t_{1m}) \neq x_1(t_{1n}) \dots (2.2.34)$ 慣性座標系 S_1 内の 2 箇所に対応する異なる時計を使用する.

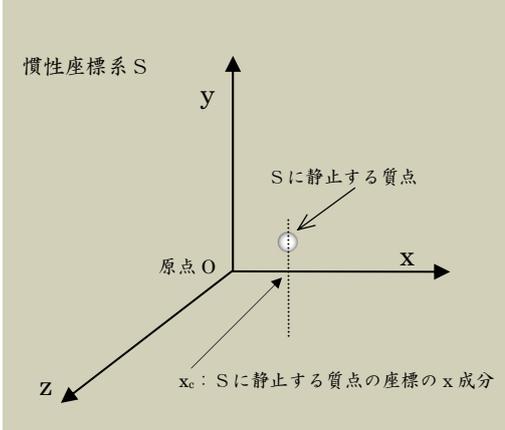


図 2.1 慣性座標系 S 内に静止する質点

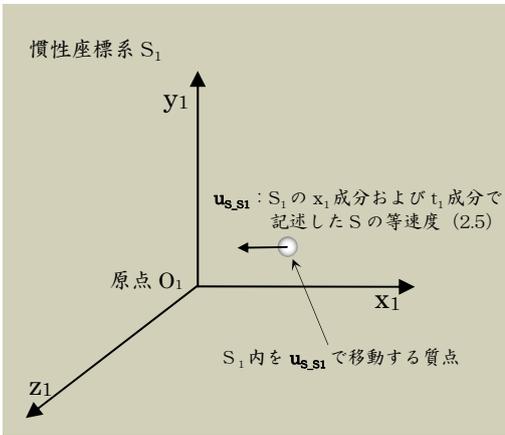


図 2.2 慣性座標系 S_1 内を移動する質点

$\mathbf{u}_{s,s1} = -u\mathbf{i}_1, (u = \text{const.}) \dots (2.5)$ 慣性座標系 S_1 の x_1 成分および t_1 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

慣性座標系 S の位置の隔たり (2.2.25) を慣性座標系 S_1 内の時点の隔たり (2.2.6) あるいは (2.2.7) の右辺に代入すると, (2.2.35) になる. (2.2.35) では 慣性座標系 S の時点の隔たりよりも慣性座標系 S_1 の時点の隔たりは γ で大きくなる. (2.2.35) の左辺の二つの時点は, 慣性座標系 S_1 内の (2.2.34) の両辺の異なる位置のそれぞれの時計で表した時点である.

$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \Delta t_{mn} \dots (2.2.35)$ 慣性座標系 S_1 内の 2 箇所に対応する異なる時計を使用する.

慣性座標系 S_1 内の時点の隔たり (2.2.35) は慣性座標系 S 内の時点の隔たり (2.2.36) に書き直すことができる. (2.2.36) では 慣性座標系 S_1 の時点の隔たりよりも慣性座標系 S の時点の隔たりは $1/\gamma$ で小さくなる. (2.2.36) の右辺の係数は (2.2.37) になる. 一般に, (2.2.37) は区間 (2.2.38) 内にある.

$\Delta t_{mn} = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta t_{1mn} \dots (2.2.36)$ 慣性座標系 S 内の 1 箇所に対応する 1 つの時計を使用する.

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} (= \text{const.}) \dots (2.2.37)$$

$$0 < \frac{1}{\gamma} \leq 1 \dots (2.2.38)$$

慣性座標系 S の位置 (2.2.26) では, 質点は慣性座標系 S 内の位置に静止していることを意味する. 慣性座標系 S_1

内の位置の関係 (2.2.34) では、その質点は慣性座標系 S_1 内の異なる位置に移動していることを意味する。これらのごとでは、(2.2.36) の左辺は慣性座標系 S_1 内で移動している質点の慣性座標系 S 内での位置 (2.2.31) の 1 つの時計で表す時点の隔たりである。一方、(2.2.35) の左辺は質点が移動している慣性座標系 S_1 内で静止している二つの時計の表す時点の隔たりである。これらの静止している時計は、慣性座標系 S_1 内での位置の関係 (2.2.34) の両辺の位置に対応する二つの異なる時計である。

(2.2.36) を (2.2.39) に書き直す。或る慣性座標内で移動している質点が静止している他の慣性座標系内の位置に対応する 1 つの時計 で表す時点の隔たりは (2.2.39) の左辺である。その質点が移動している慣性座標系内で静止している 二つの異なる時計 で表す時点の隔たりは (2.2.39) の右辺の時点の隔たり——係数 (2.2.37) は含まない。——である。ただし、それぞれの時計は、質点の位置に対応する時計 である。そして、質点は等速度運動をしているものとする。(2.2.39) の両辺の添え字には各慣性座標系内の時点の隔たりを表すのに使用した時計——時計は質点の位置に対応する。——の個数を示した。

$$\Delta t_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta t_{\text{rest_twoclocks}} \dots (2.2.39)$$

一般に (2.2.39) の符号が (2.2.40) を満足する場合は、次のように表現をすることができる。‘等速度運動している質点が静止している慣性座標系の時間は短くなっている。’ (2.2.39) および (2.2.40) は (2.2.41) および (2.2.42) を満足するものとする。

$$\Delta t_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta t_{\text{rest_twoclocks}} > 0 \dots (2.2.40) \text{ 等速度運動している質点が静止し続ける座標系の時間は短くなっている。}$$

$$\Delta t_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \Delta t_{mn} \dots (2.2.41) \text{ 慣性座標系 } S \text{ 内の 1 箇所に対応する 1 つの時計で表す時点の隔たり}$$

$$\Delta t_{\text{rest_twoclocks}} = \Delta t_{1mn} \dots (2.2.42) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ 内の 2 箇所に対応する異なる時計で表す時点の隔たり}$$

慣性座標系 S_1 の時点の微分は (2.2.29) で与えた。(2.2.29) の右辺の傾きは (2.2.43) であることも既に説明した。(2.2.44) が成立する場合は、慣性座標系 S_1 の時点の微分 (2.2.29) は (2.2.45) になる。

$$dt_1(t) \equiv t_1'(t) \cdot h \dots (2.2.29)$$

$$t_1'(t) = \text{const.} \dots (2.2.43)$$

$$h = 0 \dots (2.2.44) \text{ 仮定}$$

$$dt_1(t) = t_1'(t) \cdot h = 0 \dots (2.2.45)$$

慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.2.6) は係数 (2.2.2) を使用すると、(2.2.46) に書き直すことができる。慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.2.46) は時点の隔たり (2.1.8) および位置の隔たり (2.2.5) を変数として扱うことができる。

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f mn} \right) \dots (2.2.6)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \dots (2.2.2)$$

$$\Delta t_{1mn} = \frac{\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f_{mn}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots (2.2.46)$$

$\Delta t_{mn} \equiv t_m - t_n \dots (2.1.8)$ 時点の隔たり

$\Delta x_{f_{mn}} \equiv x_m - x_n \dots (2.2.5)$ 位置の隔たり

慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.8) を (2.2.47) のように記述する場合は、慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.46) は (2.2.48) に記述できる。(2.2.49) が成立する場合は、慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.48) は (2.2.50) に書き直すことができる。2008年現在の物理学では、一般的には慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.50) では (2.2.51) を満足するものとする。一方、慣性座標系 S₁ の時点の微分 (2.2.45) は零をとることができる。慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.51) は慣性座標系 S₁ の時点の微分 (2.2.45) が取れる零にはならない。このことで、慣性座標系 S₁ の時点の微分 (2.2.29) は慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.46) とは異なることは明らかである。

$\Delta t_{mn} = h \dots (2.2.47)$ 仮定

$$\Delta t_{1mn} = \frac{h - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f_{mn}}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots (2.2.48)$$

$h \neq 0 \dots (2.2.49)$ 仮定

$$\Delta t_{1mn} = \frac{1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{f_{mn}}}{h}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \times h, (h \neq 0) \dots (2.2.50)$$

$$\Delta t_{1mn} = \frac{1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{f_{mn}}}{h}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \times h \neq 0, (h \neq 0) \dots (2.2.51)$$

さらに、(2.2.52) を仮定すると、慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.51) は (2.2.53) に書き直すことができる。もし、仮定 (2.2.54) が成立するならば、慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.53) から (2.2.55) になる。

$\Delta t_{1mn} = h_1 \dots (2.2.52)$ 仮定

$$h_1 = \frac{1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{f_{mn}}}{h}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \times h \neq 0, (h \neq 0) \dots (2.2.53)$$

$dt_1 = h_1 \dots (2.2.54)$ 仮定

$dt_1 \neq 0 \dots (2.2.55)$

一方、慣性座標系 S の時点の微分 (2.3.4) を使用して、慣性座標系 S₁ の時点の微分 (2.2.29) を (2.3.5) で記述できることは既に示した。仮定 (2.3.6) が成立するときに、慣性座標系 S₁ の時点の微分 (2.3.5) から微分係数 (2.3.7) に記述できることも既に説明した。(2.2.55) および微分係数 (2.3.7) を使用すると、微分係数の関係式 (2.2.56) になることは

明らかである。3章では、微分係数の関係式 (2.2.56) をここでの考察よりも厳密に導出する。

$$dt = h \cdots (2.34)$$

$$dt_1(t) = t_1'(t) \cdot dt \cdots (2.35)$$

$$dt \neq 0 \cdots (2.36) \text{ 仮定}$$

$$\frac{dt_1(t)}{dt} = t_1'(t) \cdots (2.37)$$

$$\frac{dt_1(t)}{dt} \neq 0 \cdots (2.2.56)$$

慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.2.50) では仮定 (2.2.57) が成立すると、慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.2.51) になる。仮定 (2.2.57) では (2.2.58) になる。(2.2.58) の (2.2.59) は平均変化率である。この平均変化率 (2.2.59) は1次元の空間の或る時点に対応する速度に見なすことができる。(2.2.58) では、1次元で考えると、或る時点に対応する速度 (2.2.59) および慣性座標系 S_1 の等速度との積が真空中の光の速さの2乗に等しくはないことを記述している。ただし、慣性座標系 S_1 の等速度 (2.6) の成分は1次元の x 軸方向のみで考えると、慣性座標系 S_1 の等速度と見なせる。

(2.2.58) では、アインシュタインの特殊相対性理論で扱う速度の制限について記述している。このような速度の制限については、3章4節でも考察する。

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{f mn}}{h} \neq 0, (h \neq 0) \cdots (2.2.57) \text{ 仮定}$$

$$u \cdot \frac{\Delta x_{f mn}}{h} \neq c^2, (h \neq 0) \cdots (2.2.58)$$

$$\frac{\Delta x_{f mn}}{h}, (h \neq 0) \cdots (2.2.59) \text{ 一次元の空間の或る時点に対応する速度と看做せる平均変化率}$$

$$\mathbf{u}_{S_1-S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \cdots (2.6) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の } x \text{ 成分および } t \text{ 成分で記述した慣性座標系 } S_1 \text{ の等速度}$$

3 特殊相対性理論の速度の変換式

2章ではローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) を示した。そして、ローレンツ変換の (2.21) および位置を示す関数 (2.26) を使用して、2章で時点の微分の定義を記述した。2章1節ではローレンツ変換の (2.18) および (2.21) を使用して、慣性座標系 S の座標および慣性座標系 S₁ の座標の成分となる二つの時点の隔たりを記述した。そして、2章1節では、‘慣性座標系 S の時計は慣性座標系 S₁ の時計とは同期が取れていない’ことを説明した。2章2節では、慣性座標系 S の座標および慣性座標系 S₁ の座標の成分となる空間の点に質点の位置を示す関数を対応させて、時点の隔たりを記述した。その時点の隔たりの式から、‘等速度運動している質点が静止している慣性座標系の時間は短くなっている’ことを説明した。

速度を考察する際には、質点の位置を示す関数で記述する位置の隔たりも必要である。3章1節では質点の位置を示す関数を使用して、位置の隔たりの式および時点の隔たりの式が慣性座標系 (2.6) の成分から計算できる近似的計算を説明する。さらに、位置の隔たりの式から導出できる‘等速度運動する物体の長さの収縮’について説明する。

$\mathbf{u}_{S_1, S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \cdots (2.6)$ 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S₁ の等速度

3章2節では、質点および微分係数を使用して各時点に対応する1次元の速度の定義を与える。そして、1次元の速度を使用して、質点の位置を示す関数の微分を定義する。その関数の微分および時点の微分を使用して、微分係数である1次元の速度を微分の記号で記述する。空間の三つの成分にそれぞれ定義した1次元の速度を使用して、3次元の速度を定義する。

3章3節では、アインシュタインの特殊相対性理論での速度の変換を導出する。速度の変換の導出は合成関数を使用する二つの方法で説明する。最初に説明するものは合成関数の微分法を使用する方法である。他方のものは、位置の隔たりおよび時点の隔たりを使用して、1次元の速度の定義から導出する方法である。著者は、合成関数の微分法からの導出を好んでいる。

3章4節では、導出した速度の変換に与えられている運動の制限について簡単に説明する。また、アインシュタインの特殊相対性理論の質量——相対論的質量と呼ぶ。——で考察できる速さの制限について説明する。時点の微分を記述する速度と速度の変換との関係についても説明する。

3.1 特殊相対性理論の位置の隔たりおよび等速度運動する物体の長さの収縮

3章1節では、特殊相対性理論の物体の長さの収縮について説明する。2章2節で使用した (2.2.1) ~ (2.2.4) を使用する。(2.2.1) ~ (2.2.4) は慣性座標系 S および慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す x 成分および x₁ 成分の関数である。

$$x_m = x(t_m) \cdots (2.2.1) \text{ 慣性座標系 S の位置の x 成分}$$

$$x_n = x(t_n) \cdots (2.2.2) \text{ 慣性座標系 S の位置の x 成分}$$

$$x_{1m} = x_1(t_{1m}) \cdots (2.2.3) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の位置の } x_1 \text{ 成分}$$

$$x_{1n} = x_1(t_{1n}) \cdots (2.2.4) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の位置の } x_1 \text{ 成分}$$

ローレンツ変換の (2.18) を使用して、(2.2.3) の左辺を (3.1.1) で記述する。同様に、(2.2.4) の左辺を (3.1.2) で記述する。(3.1.1) および (3.1.2) の右辺には、(2.22) を仮定している。

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \cdots (2.18)$$

$$x_{1m} = \gamma \cdot (x_m - u \cdot t_m) \cdots (3.1.1) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の位置の } x_1 \text{ 成分}$$

$$x_{1n} = \gamma \cdot (x_n - u \cdot t_n) \cdots (3.1.2) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の位置の } x_1 \text{ 成分}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \cdots (2.22)$$

さらに、2章で使用した(2.1.8)、(2.1.9)および(2.2.5)を3章1節でも使用する。そして、慣性座標系 S_1 の位置の隔たり(3.1.3)を記述する。

$$\Delta t_{mn} \equiv t_m - t_n \cdots (2.1.8) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の時点の隔たり}$$

$$\Delta t_{1mn} \equiv t_{1m} - t_{1n} \cdots (2.1.9) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ の時点の隔たり}$$

$$\Delta x_{fmn} \equiv x_m - x_n \cdots (2.2.5) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の位置の隔たり}$$

$$\Delta x_{f1mn} \equiv x_{1m} - x_{1n} \cdots (3.1.3) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ の位置の隔たり}$$

(3.1.3)の右辺に(3.1.1)および(3.1.2)を代入して、慣性座標系 S の時点の隔たり(2.1.8)および1つの質点の位置の隔たり(2.2.5)を使用すると慣性座標系 S_1 内での1つの質点の位置の隔たり(3.1.4)を記述できる。(3.1.4)は(3.1.5)に記述できる。

$$\Delta x_{f1mn} = \gamma \cdot (\Delta x_{fmn} - u \cdot \Delta t_{mn}) \cdots (3.1.4) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ での1つの質点の位置の隔たり}$$

$$\Delta x_{f1mn} = \gamma \cdot \Delta x_{fmn} - u \cdot \gamma \cdot \Delta t_{mn} \cdots (3.1.5)$$

慣性座標系 S_1 の時点の隔たり(2.2.7)と同様に、(3.1.4)の右辺には(2.2.8)および(2.2.9)が記述してある。(2.2.8)は(2.2.7)では第一項に記述してあるが、(3.1.5)では第二項に記述してある。(2.2.9)は(2.2.7)では第二項に記述してあるが、(3.1.5)では第一項に記述してある。慣性座標系 S_1 の等速度(2.6)の成分は(2.2.7)の第二項、(3.1.5)の第二項および(2.22)に記述されている。(2.2.7)および(3.1.5)の第二項にはマイナスの記号が示されている。このマイナス記号および慣性座標系 S_1 の等速度(2.6)の成分のために、(2.2.7)および(3.1.5)の符号は、(2.2.8)および(2.2.9)のみでは決定しない。(2.2.7)および(3.1.5)の第二項に記述した慣性座標系 S_1 の等速度(2.6)の成分が、(2.2.7)および(3.1.5)の符号の決定に関係する。また、次のように、慣性座標系 S_1 の等速度(2.6)の成分を使用した近似の計算を(2.2.7)および(3.1.5)に行うことで近似の計算の記述を導出できる。

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{fmn} \cdots (2.2.7) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ の時点の隔たり}$$

$$\gamma \cdot \Delta t_{mn} \cdots (2.2.8) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の時点の隔たりよりも } \gamma \text{ で大きくなる。}$$

$$\gamma \cdot \Delta x_{fmn} \cdots (2.2.9) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の位置の隔たりよりも } \gamma \text{ で大きくなる。}$$

$$\mathbf{u}_{S_1 S} = \mathbf{u}, (u = \text{const.}) \cdots (2.6) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の } x \text{ 成分および } t \text{ 成分で記述した慣性座標系 } S_1 \text{ の等速度}$$

一般的には、(2.2.7)および(3.15)は慣性座標系 S_1 の等速度(2.6)の成分が真空中の光の速さに近いほど強く現れる。逆に、慣性座標系 S_1 の等速度(2.6)の成分が真空中の光の速さから遠いほど(2.2.7)および(3.15)は弱く現れる。もし、慣性座標系 S_1 の等速度(2.6)の成分が(3.1.6)を満足して係数(3.1.7)であるならば、(2.2.7)および(3.1.5)の右辺は近似の計算でそれぞれ(3.1.8)および(3.1.9)になる。

$$u \ll c \cdots (3.1.6)$$

$$\gamma \doteq 1 (= \text{const.}) \cdots (3.1.7)$$

$$(2.2.7) \text{ の右辺の場合: } \Delta t_{mn} \cdots (3.1.8)$$

$$(3.1.5) \text{ の右辺の場合: } \Delta x_{fmn} - u \cdot \Delta t_{mn} \cdots (3.1.9)$$

慣性座標系 S の x 軸に真っ直ぐに沿って静止させた真っ直ぐな棒を仮定する。慣性座標系 S_1 に静止する質点を仮定する——図3.1および図3.2に簡単な説明を与えた。——。そして、この静止した質点の位置——慣性座標系 S_1 内の位置のこと。——から計算すると、慣性座標系 S_1 内に静止する質点の位置の隔たり(3.1.4)の左辺に(3.1.10)を仮定できる。(3.1.4)の右辺に記述してある慣性座標系 S の位置の隔たりに(3.1.11)を仮定する。(3.1.4)の左辺に(3.1.10)

を代入すると、慣性座標系 S 内での質点の位置の隔たり (3.1.12) を導出できる。

$\Delta x_{f_{1mn}} = 0 \dots (3.1.10)$ 慣性座標系 S_1 内に静止する質点の位置の隔たりの仮定——1つの時計で時刻を表す。——

$\Delta x_{f_{mn}} \neq 0 \dots (3.1.11)$ 二つの時計で時刻を表す。

$$\Delta x_{f_{mn}} = u \cdot \Delta t_{mn} \dots (3.1.12)$$

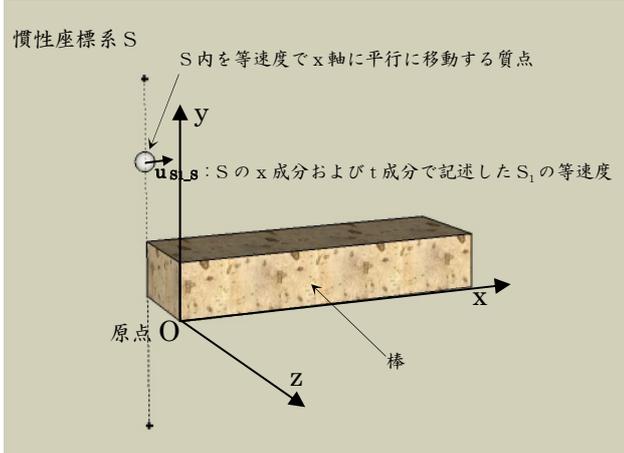


図 3.1 慣性座標系 S 内に静止している棒

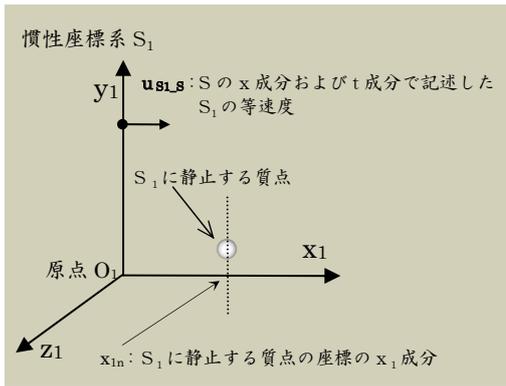


図 3.2 慣性座標系 S_1 内に静止する質点

慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.2.6) に時間 (3.1.13) を仮定する。慣性座標系 S_1 内での1つの質点の位置の隔たり (3.1.10) を使用して、(3.1.3) から慣性座標系 S_1 内の質点の位置 (3.1.14) を導出できる。慣性座標系 S_1 の時間 (3.1.13) は、慣性座標系 S 内に静止している棒の両端が慣性座標系 S_1 内に静止する1つの質点の位置の (3.1.14) を通り過ぎる時間であるものとする。(3.1.13) から (3.1.15) を記述できる。(3.1.15) を (3.1.16) に書き直せる。ただし、慣性座標系 S_1 内での棒の両端の座標を記述する二つの x_1 成分と1つの質点の位置の (3.1.14) との一致についてのことである。

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f_{mn}} \right) \dots (2.2.6)$$

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f_{mn}} \right) > 0 \dots (3.1.13)$$

$x_{1m} = x_{1n} \dots (3.1.14)$ 慣性座標系 S_1 内に静止する1つの質点の位置

$$\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f_{mn}} > 0 \dots (3.1.15)$$

$$\Delta t_{mn} > \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f_{mn}} \dots (3.1.16)$$

(3.1.16) の右辺に記述した慣性座標系 S の位置の隔たりに (3.1.12) を代入すると, (3.1.17) になる. (3.1.17) から (3.1.18) を導出できる. (3.1.18) は慣性座標系 S₁ の等速度 (2.6) の成分と真空中の光の速さとの関係を満足している. (3.1.17) を (3.1.19) に書き直す. (3.1.19) には (3.1.20) を仮定している. (3.1.20) を使用すると, (3.1.19) から時間 (3.1.21) になる. 慣性座標系 S 内に静止している棒の両端が慣性座標系 S₁ の質点の位置 (3.1.14) を通り過ぎる慣性座標系 S₁ 内の時間(3.1.13)に対応する慣性座標系 S 内の時間が, (3.1.21) である. この棒の議論では, 時間(3.1.21) を使用すると (3.1.12) は (3.1.22) になるものとする. (3.1.22) は慣性座標系 S 内の x 成分で記述した棒の x 軸方向の長さである.

$$\Delta t_{mn} > \frac{u^2}{c^2} \cdot \Delta t_{mn} \dots (3.1.17)$$

$$c^2 > u^2 \dots (3.1.18)$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \cdot \Delta t_{mn} > 0 \dots (3.1.19)$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) > 0 \dots (3.1.20)$$

$$\Delta t_{mn} > 0 \dots (3.1.21)$$

$$\Delta x_{f_{mn}} = u \cdot \Delta t_{mn} > 0, (u > 0) \dots (3.1.22)$$

(2.2.5) を使用すると, (3.1.11) から慣性座標系 S の位置の関係 (3.1.23) を記述できる. 慣性座標系 S₁ の時間 (3.1.13) は (3.1.14) の位置の 1 つの時計で表す時間である. 慣性座標系 S の時間 (3.1.21) は慣性座標系 S 内に在る (3.1.23) の両辺の異なる位置の異なる時計で表す時間である. (3.1.23) の両辺に記述した慣性座標系 S 内の位置はそれぞれ慣性座標系 S 内に静止した棒の両端の位置である. 慣性座標系 S 内に静止した棒の両端の位置に慣性座標系 S₁ での (3.1.14) の位置が一致した場合を仮定する. この棒の両端に慣性座標系 S₁ の (3.1.14) の位置が一致したときの慣性座標系 S 内の時点は二つある. この二つの時点で慣性座標系 S の時間 (2.1.8) を記述できる——図 3.3 に簡単な説明を与えた. —

$$x_m \neq x_n \dots (3.1.23)$$

$$\Delta t_{mn} \equiv t_m - t_n \dots (2.1.8) \text{ 慣性座標系 S の時点の隔たり}$$

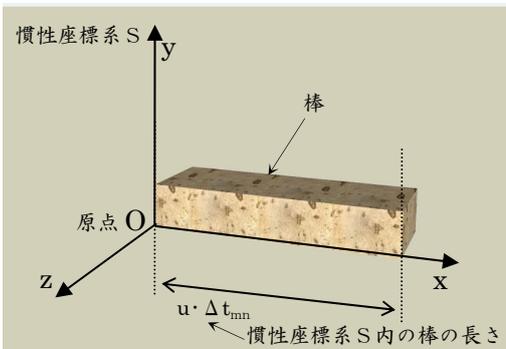


図 3.3 慣性座標系 S 内の棒の長さ

(3.1.13) から慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.8) を導出する. (3.1.13) を (3.1.24) に書き直す. (3.1.24) から慣性座標系 S の時点の隔たり (3.1.25) を記述できる.

$$\frac{\Delta t_{1mn}}{\gamma} = \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f mn} \dots (3.1.24)$$

$$\Delta t_{mn} = \frac{\Delta t_{1mn}}{\gamma} + \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f mn} \dots (3.1.25)$$

(3.1.12) の右辺の慣性座標系 S の時点の隔たりに (3.1.25) を代入すると, (3.1.26) になる. (3.1.26) から (3.1.27) を記述できる. (3.1.27) を (3.1.28) に書き直す. (3.1.28) を (3.1.29) に整理する.

$$\Delta x_{f mn} = u \cdot \Delta t_{mn} \dots (3.1.12)$$

$$\Delta x_{f mn} = u \cdot \left(\frac{\Delta t_{1mn}}{\gamma} + \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f mn} \right) \dots (3.1.26)$$

$$\Delta x_{f mn} = u \cdot \frac{\Delta t_{1mn}}{\gamma} + \frac{u^2}{c^2} \cdot \Delta x_{f mn} \dots (3.1.27)$$

$$\Delta x_{f mn} - \frac{u^2}{c^2} \cdot \Delta x_{f mn} = u \cdot \frac{\Delta t_{1mn}}{\gamma} \dots (3.1.28)$$

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \cdot \Delta x_{f mn} = u \cdot \frac{\Delta t_{1mn}}{\gamma} \dots (3.1.29)$$

(2.22) から (3.1.30) を記述できる. (3.1.30) を使用すると, (3.1.29) は (3.1.31) に記述できる.

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} > 0 \dots (3.1.30)$$

$$\frac{\Delta x_{f mn}}{\gamma^2} = u \cdot \frac{\Delta t_{1mn}}{\gamma} \dots (3.1.31)$$

(3.1.31) から (3.1.32) になる. (3.1.32) から (3.1.33) を記述できる. (3.1.33) の左辺は, 慣性座標系 S 内に静止している棒の x 軸方向の長さである.

$$\frac{\Delta x_{f mn}}{\gamma} = u \cdot \Delta t_{1mn} > 0 \dots (3.1.32)$$

$$\Delta x_{f mn} = \gamma \cdot (u \cdot \Delta t_{1mn}) \dots (3.1.33) \text{ 慣性座標系 S 内の 2 箇所に対応する異なる時計を使用する.}$$

慣性座標系 S 内では質点の (3.1.14) の位置は速さ (3.1.34) で棒の両端を時間 (3.1.21) で通過する. 3章1節では, 慣性座標系 S₁ の時間 (3.1.13) で, 慣性座標系 S 内に静止している棒の両端は慣性座標系 S₁ 内の (3.1.14) の位置を速さ (3.1.34) で通り過ぎる. この時間 (3.1.13) に棒が慣性座標系 S₁ 内を進んだ距離は (3.1.35) になる. そして, 慣性座標系 S₁ 内で棒が進んだ距離 (3.1.35) は慣性座標系 S₁ 内を移動している棒の x₁ 軸方向の長さである. ただし,

(3.1.35) は慣性座標系 S₁ 内の x₁ 成分で記述した棒の長さである.

$$x_{1m} = x_{1n} \dots (3.1.14) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の位置}$$

$$u > 0 \dots (3.1.34)$$

$$L_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = u \cdot \Delta t_{1mn} \dots (3.1.35) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ 内の 1 箇所に対応する 1 つの時計で表した時間を使用する.}$$

慣性座標系 S 内の x 成分で記述した棒の x 軸方向の長さを (3.1.36) で記述する. (3.1.35) および (3.1.36) を使用すると, (3.1.33) は (3.1.37) で記述できる.

$$L_{\text{rest_twoclocks}} = \Delta x_{f mn} \dots (3.1.36)$$

$$L_{\text{rest_twoclocks}} = \gamma \cdot L_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} \dots (3.1.37)$$

(3.1.37) は (3.1.38) に書き直せる. (3.1.38) は (3.1.32) から記述できる. (3.1.38) では, 慣性座標系 S 内に静止している棒の長さは, その棒が等速直線運動する慣性座標系 S_1 内では収縮する. このことを, 質点を使用して, 一般的にまとめると次のようになる. (3.1.38) では静止している場合の物体の長さとは比べると, 等速度運動する 1 つの質点で測定したその物体の長さは, その等速度運動の方向に収縮することを意味する. さらに一般的には, 次のようになる. 慣性座標系内で静止している物体の長さは, その物体が等速度運動する慣性座標系内では, その等速度の方向に収縮している.

$$L_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot L_{\text{rest_twoclocks}} \dots (3.1.38) \text{ 等速度運動する 1 つの質点で測定した長さは, その運動方向に収縮する.}$$

慣性座標系 S の y 成分での棒の位置を与える関数 (3.1.39) および (3.1.40) を仮定する. 慣性座標系 S_1 の y_1 成分での棒の位置を与える関数 (3.1.41) および (3.1.42) を仮定する. ローレンツ変換の (2.19) を使用すると, (3.1.43) および (3.1.44) を記述できる. (3.1.43) および (3.1.44) を使用すると, (3.1.45) で慣性座標系 S の y 成分での位置の隔たりおよび慣性座標系 S_1 の y_1 成分での位置の隔たりを記述できる. (3.1.45) では慣性座標系 S の y 成分で記述する棒の長さは慣性座標系 S_1 の y_1 成分で記述する棒の長さに等しい.

$$y_m = y(t_m) \dots (3.1.39) \text{ 慣性座標系 } S \text{ での棒の位置の } y \text{ 成分}$$

$$y_n = y(t_n) \dots (3.1.40) \text{ 慣性座標系 } S \text{ での棒の位置の } y \text{ 成分}$$

$$y_{1m} = y_1(t_{1m}) \dots (3.1.41) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ での棒の位置の } y_1 \text{ 成分}$$

$$y_{1n} = y_1(t_{1n}) \dots (3.1.42) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ での棒の位置の } y_1 \text{ 成分}$$

$$y_1 = y \dots (2.19)$$

$$y_{1m} = y_m \dots (3.1.43)$$

$$y_{1n} = y_n \dots (3.1.44)$$

$$y_{1m} - y_{1n} = y_m - y_n > 0 \dots (3.1.45) y \text{ 成分および } y_1 \text{ 成分で記述した棒の両端の位置の隔たり}$$

慣性座標系 S の z 成分での棒の位置を与える関数 (3.1.46) および (3.1.47) を仮定する. 慣性座標系 S_1 の z_1 成分での棒の位置を与える関数 (3.1.48) および (3.1.49) を仮定する. ローレンツ変換の (2.20) を使用すると, (3.1.50) および (3.1.51) を記述できる. (3.1.50) および (3.1.51) を使用すると, (3.1.52) で慣性座標系 S の z 成分での位置の隔たりおよび慣性座標系 S_1 の z_1 成分での位置の隔たりを記述できる. (3.1.52) では慣性座標系 S の z 成分で記述する棒の長さは慣性座標系 S_1 の z_1 成分で記述する棒の長さに等しい.

$$z_m = z(t_m) \dots (3.1.46) \text{ 慣性座標系 } S \text{ での棒の位置の } z \text{ 成分}$$

$$z_n = z(t_n) \dots (3.1.47) \text{ 慣性座標系 } S \text{ での棒の位置の } z \text{ 成分}$$

$$z_{1m} = z_1(t_{1m}) \dots (3.1.48) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ での棒の位置の } z_1 \text{ 成分}$$

$$z_{1n} = z_1(t_{1n}) \dots (3.1.49) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ での棒の位置の } z_1 \text{ 成分}$$

$$z_1 = z \dots (2.20)$$

$$z_{1m} = z_m \dots (3.1.50)$$

$$z_{1n} = z_n \dots (3.1.51)$$

$$z_{1m} - z_{1n} = z_m - z_n > 0 \dots (3.1.52) z \text{ 成分および } z_1 \text{ 成分で記述した棒の両端の位置の隔たり}$$

(3.1.38), (3.1.45) および (3.1.52) から, 次のようにまとめることができる. 物体が等速直線運動する場合を仮定する. この仮定での, 特殊相対性理論で等速直線運動する物体の長さは次のようになる. 静止している物体の長さとは比較すると, 等速度運動する物体の長さはその等速度運動の方向に収縮する. また, 等速直線運動しない方向の物体の長さは同じである.

$$L_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot L_{\text{rest_twoclocks}} \dots (3.1.38)$$

$$y_{1m} - y_{1n} = y_m - y_n > 0 \dots (3.1.45)$$

$$z_{1m} - z_{1n} = z_m - z_n > 0 \dots (3.1.52)$$

棒が移動している慣性座標系 S_1 内の時間 (2.2.6) を計算する. 慣性座標系 S 内での棒の長さになる位置の隔たりは (3.1.12) で記述できる. (3.1.12) を (2.2.6) の右辺に代入すると, 慣性座標系 S_1 内の時間 (3.1.53) になる.

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f mn} \right) \dots (2.2.6)$$

$$\Delta x_{f mn} = u \cdot \Delta t_{mn} \dots (3.1.12)$$

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u^2}{c^2} \cdot \Delta t_{mn} \right) \dots (3.1.53)$$

慣性座標系 S_1 内の時間 (3.1.53) を (3.1.54) に書き直す. 慣性座標系 S_1 内の時間 (3.1.54) は (3.1.55) に整理できる.

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \cdot \Delta t_{mn} \dots (3.1.54)$$

$$\Delta t_{1mn} = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta t_{mn} \dots (3.1.55)$$

(3.1.55) の右辺の時間——係数 (2.22) は含まない. ——は (3.1.23) の両辺の位置にそれぞれ対応する異なる時計で表した時間である. 慣性座標系 S_1 内の時間 (3.1.55) の左辺の時間は (3.1.14) の位置に対応する1つの時計で表した時間である.

$x_m \neq x_n \dots (3.1.23)$ 慣性座標系 S 内の2箇所に対応する異なる時計を使用する.

$x_{1m} = x_{1n} \dots (3.1.14)$ 慣性座標系 S_1 内の1箇所に対応する1つの時計を使用する.

(3.1.56) および (3.1.57) を使用すると, (3.1.55) は (2.2.40) に記述できる. (2.2.40) では, 棒が等速度運動している慣性座標系 S_1 内の時間は, その等速度運動している棒が静止している慣性座標系 S 内の時間よりも短くなっている.

$$\Delta t_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \Delta t_{1mn} \dots (3.1.56)$$

$$\Delta t_{\text{rest_twoclocks}} = \Delta t_{mn} \dots (3.1.57)$$

$$\Delta t_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta t_{\text{rest_twoclocks}} > 0 \dots (2.2.40) \text{棒が等速度運動で移動している慣性座標系の時間は短くなっている.}$$

慣性座標系 S 内に棒を静止させ, 慣性座標系 S を慣性座標系 S_1 内で移動させる場合には次のような計算結果になった. 以下では, 棒および質点にそれぞれ観点を置いた場合でまとめたものである.

棒に観点を置くと, 次のようにまとめることができる. 棒が静止している慣性座標系 S 内の時間よりも, 棒が等速度運動している慣性座標系 S_1 内の時間は短くなる. 棒が静止している慣性座標系 S 内での棒の長さよりも, 棒が等速度運動している慣性座標系 S_1 内の棒の長さは短くなる.

質点に観点を置くと, 次のようにまとめることができる. 1つの質点が静止している慣性座標系 S_1 内の時間はその質点が等速度運動している慣性座標系 S 内の時間よりも短くなっている. 1つの質点が静止している慣性座標系 S_1 内で測定

した——慣性座標系 S 内に静止する——物体の長さは、その質点が等速度運動している慣性座標系 S 内でのその物体の長さよりも、その運動方向に収縮する。

(2.2.40) および (3.1.38) では、質点の位置に対応する時計が表す時点を使用した。(2.2.40) および (3.1.38) の両辺の添え字には各慣性座標系の質点の位置に対応する時計の個数を示した。添え字に示した‘質点の位置に対応する時計の個数’で整理すると、時間あるいは長さが短くなる慣性座標系を認識し易くなる。この添え字を使用し、時点を表す時計の個数についてまとめると次のようになる。ただし、質点を使用しないで計算する棒の長さの収縮の考察を 2 章 1 節の計算に結びつけることができる。この 2 章 1 節を導入した棒の収縮の考察は付録 iii で説明した。

(2.2.40) の左辺の時間は、質点が静止している慣性座標系内では、その質点の位置の 1 つの時計で時間を表した。
(3.1.38) の左辺では、物体が等速度運動している慣性座標系に静止している質点の位置の 1 つの時計で時間を表した。
 一方、(2.2.40) の右辺の時間——係数 (2.22) を含まない。——は、質点が等速度運動している慣性座標系内では、その質点の位置の二つの異なる時計で時間を表した。
(3.1.38) の右辺では、物体が静止している慣性座標系内で移動している質点の位置の二つの異なる時計で時間を表した。

$\Delta t_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta t_{\text{rest_twoclocks}} > 0 \dots (2.2.40)$ 等速度運動している質点が静止し続ける座標系の時間は短くなっている。

$L_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot L_{\text{rest_twoclocks}} \dots (3.1.38)$ 等速度運動する物体の長さは、その運動方向に収縮する。

2 章 2 節では、慣性座標系 S 内に静止する質点が慣性座標系 S₁ 内で移動する場合を扱った。この場合では、慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (2.2.35) が成立した。慣性座標系 S 内に静止する質点の位置の隔たりには (2.2.25) が成立した。ローレンツ変換の (2.18) を使用して、(3.1.3) を計算すると (3.1.58) になる。(3.1.58) の右辺に (2.2.25) を代入すると (3.1.59) になる。

$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \Delta t_{mn} \dots (2.2.35)$ 慣性座標系 S₁ 内の 2 箇所に対応する異なる時計を使用する。

$\Delta x_{fmn} = 0 \dots (2.2.25)$

$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \dots (2.18)$

$\Delta x_{f1mn} \equiv x_{1m} - x_{1n} \dots (3.1.3)$ 慣性座標系 S₁ の位置の隔たり

$\Delta x_{f1mn} = \gamma \cdot (\Delta x_{fmn} - u \cdot \Delta t_{mn}) \dots (3.1.58)$

$\Delta x_{f1mn} = \gamma \cdot (-u \cdot \Delta t_{mn}) \dots (3.1.59)$

(2.2.35) および (3.1.59) を使用すると、平均変化率 (3.1.60) を記述できる。平均変化率 (3.1.60) は (3.1.61) に整理できる。平均変化率 (3.1.61) の右辺は慣性座標系 S の等速度 (2.5) の成分に等しい。

$\frac{\Delta x_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = \frac{\gamma \cdot (-u \cdot \Delta t_{mn})}{\gamma \cdot \Delta t_{mn}}, (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.60)$

$\frac{\Delta x_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = -u, (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.61)$ 平均変化率

$\mathbf{u}_{S_{S1}} = -u \mathbf{i}_1, (u = \text{const.}) \dots (2.5)$ 慣性座標系 S₁ の x₁ 成分および t₁ 成分で記述した慣性座標系 S の等速度

一方、(2.1.8) に (3.1.62) を仮定する。(2.2.25) および (3.1.62) を使用すると、平均変化率 (3.1.63) を記述できる。

$\Delta t_{mn} \equiv t_m - t_n \dots (2.1.8)$ 慣性座標系 S の時点の隔たり

$$\Delta t_{mn} \neq 0 \dots (3.1.62)$$

$$\frac{\Delta x_{f mn}}{\Delta t_{mn}} = \frac{0}{\Delta t_{mn}} = 0 \dots (3.1.63) \text{ 平均変化率}$$

2章2節で使用した平均変化率(2.2.59)の分母に(2.2.47)を代入すると、平均変化率(3.1.64)を記述できる。(3.1.64)は(3.1.63)の左辺の記述に等しい。そして、平均変化率(3.1.64)を1次元の空間の或る時点に対応する速度に等しいものと仮定する。或る時点に対応する速度(3.1.63)では質点のx成分の1次元の速度が零になっている——質点が慣性座標系S内に静止している。——ことを意味する。図2.1に質点が静止していることを示した。

$$\frac{\Delta x_{f mn}}{h}, (h \neq 0) \dots (2.2.59)$$

$$\Delta t_{mn} = h \dots (2.2.47)$$

$$\frac{\Delta x_{f mn}}{\Delta t_{mn}}, (\Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.64) \text{ 1次元の空間の或る時点に対応する速度と見なせる平均変化率}$$

ここで、平均変化率(3.1.65)を慣性座標系S₁内の質点の或る時点に対応する1次元の速度として解釈する。慣性座標系S₁内の質点の或る時点に対応する1次元の速度(3.1.61)では、慣性座標系S内に静止している質点が慣性座標系S₁内のx₁成分の方向に慣性座標系Sの等速度(2.5)で移動していることを意味する。図2.2に質点が等速度で移動していることを示した。

$$\frac{\Delta x_{f 1mn}}{\Delta t_{1mn}}, (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.65) \text{ 1次元の空間の或る時点に対応する速度と見なせる平均変化率}$$

質点の座標の慣性座標系Sのx成分および慣性座標系S₁のx₁成分となる関数の平均変化率と速度の関係を考察した。次には、他の成分の位置を示す関数の平均変化率および速度の関係を考察する。

慣性座標系Sのy成分の位置を示す関数の平均変化率は(3.1.66)になる。(3.1.66)では慣性座標系Sのy成分で記述した位置の隔たりを(3.1.67)で仮定している。

$$\frac{\Delta y_{f mn}}{\Delta t_{mn}}, (\Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.66) \text{ 1次元の空間の或る時点に対応する速度と見なせる平均変化率}$$

$$\Delta y_{f mn} \equiv y_m - y_n \dots (3.1.67)$$

慣性座標系S₁での質点の座標のy₁成分となる関数の平均変化率は(3.1.68)になる。(3.1.68)では慣性座標系S₁のy₁成分で記述した位置の隔たりを(3.1.69)で仮定している。

$$\frac{\Delta y_{f 1mn}}{\Delta t_{1mn}}, (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.68) \text{ 1次元の空間の或る時点に対応する速度と見なせる平均変化率}$$

$$\Delta y_{f 1mn} \equiv y_{1m} - y_{1n} \dots (3.1.69)$$

慣性座標系Sでの質点の座標のz成分となる関数の平均変化率は(3.1.70)になる。(3.1.70)では慣性座標系Sのz成分で記述した位置の隔たりを(3.1.71)で仮定している。

$$\frac{\Delta z_{f mn}}{\Delta t_{mn}}, (\Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.70) \text{ 1次元の空間の或る時点に対応する速度と見なせる平均変化率}$$

$$\Delta z_{f mn} \equiv z_m - z_n \dots (3.1.71)$$

慣性座標系S₁での質点の座標のz₁成分となる関数の平均変化率は(3.1.72)になる。(3.1.72)では慣性座標系S₁のz₁成分で記述した位置の隔たりを(3.1.73)で仮定している。

$\frac{\Delta z_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}}, (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.72)$ 1次元の空間の或る時点に対応する速度と見なせる平均変化率

$$\Delta z_{f1mn} \equiv z_{1m} - z_{1n} \dots (3.1.73)$$

慣性座標系 S での質点の座標の各成分となる関数の平均変化率と速度の関係を示すために、慣性座標系 S の時点の区間 (3.1.74) を仮定する。区間 (3.1.74) 内には (3.1.75) を仮定している。(3.1.75) を使用して、区間 (3.1.74) 内の点 (3.1.76) を仮定する。ただし、(3.1.76) の右辺の h は (2.2.47) の h とは関係はないものとする。

$$t_n < t_\tau < t_m \dots (3.1.74)$$

$$t_\tau \dots (3.1.75)$$

$$t_{\tau_0} \equiv t_\tau + h \dots (3.1.76)$$

区間 (3.1.74) 内に微分係数 (3.1.77) を仮定する。微分積分学での平均値の定理を使用すると、(3.1.78) が成立する。平均値の定理 (3.1.78) では、平均変化率 (3.1.64) は区間 (3.1.74) 内に存在する微分係数 (3.1.77) に等しい値であることを意味する。微分係数 (3.1.77) は 3章2節で定義する1次元の速度 になる。このことから、平均変化率 (3.1.64) は区間 (3.1.74) 内に記述できる1次元の速度 (3.1.77) の値に等しいものと見なせる。

$$x'(t_\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_\tau + h) - x(t_\tau)}{h} \dots (3.1.77)$$

$$\frac{\Delta x_{fmn}}{\Delta t_{mn}} = x'(t_\tau), (\Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.78) \text{ 平均値の定理}$$

区間 (3.1.74) 内に微分係数 (3.1.79) を仮定する。微分積分学での平均値の定理を使用すると、(3.1.80) が成立する。平均値の定理 (3.1.80) では、平均変化率 (3.1.66) は区間 (3.1.74) 内に存在する微分係数 (3.1.79) に等しい値であることを意味する。微分係数 (3.1.79) は 3章2節で定義する1次元の速度 になる。このことから、平均変化率 (3.1.66) は区間 (3.1.74) 内に記述できる1次元の速度 (3.1.79) の値に等しいものと見なせる。

$$y'(t_\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_\tau + h) - y(t_\tau)}{h} \dots (3.1.79)$$

$$\frac{\Delta y_{fmn}}{\Delta t_{mn}} = y'(t_\tau), (\Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.80) \text{ 平均値の定理}$$

区間 (3.1.74) 内に微分係数 (3.1.81) を仮定する。微分積分学での平均値の定理を使用すると、(3.1.82) が成立する。平均値の定理 (3.1.82) では、平均変化率 (3.1.70) は区間 (3.1.74) 内に存在する微分係数 (3.1.81) に等しい値であることを意味する。微分係数 (3.1.81) は 3章2節で定義する1次元の速度 になる。このことから、平均変化率 (3.1.70) は区間 (3.1.74) 内に記述できる1次元の速度 (3.1.81) の値に等しいものと見なせる。

$$z'(t_\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t_\tau + h) - z(t_\tau)}{h} \dots (3.1.81)$$

$$\frac{\Delta z_{fmn}}{\Delta t_{mn}} = z'(t_\tau), (\Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.82) \text{ 平均値の定理}$$

慣性座標系 S₁ での質点の座標の各成分となる関数の平均変化率と速度の関係を示すために、慣性座標系 S₁ の時点の区間 (3.1.83) を仮定する。区間 (3.1.83) 内には (3.1.84) を仮定している。(3.1.84) を使用して、区間 (3.1.83) 内の点 (3.1.85) を仮定する。ただし、(3.1.85) の右辺の h₁ は (2.2.52) の h₁ とは関係はないものとする。

$$t_{1n} < t_{1\tau} < t_{1m} \dots (3.1.83)$$

$$t_{1\tau} \dots (3.1.84)$$

$$t_{1r0} \equiv t_{1r} + h_1 \dots (3.1.85)$$

区間 (3.1.83) 内に微分係数 (3.1.86) を仮定する. 微分積分学での平均値の定理を使用すると, (3.1.87) が成立する. 平均値の定理 (3.1.87) では, 平均変化率 (3.1.65) は区間 (3.1.83) 内に存在する微分係数 (3.1.86) に等しい値であることを意味する. 微分係数 (3.1.86) は 3章2節で定義する1次元の速度になる. このことから, 平均変化率 (3.1.65) は区間 (3.1.83) 内に記述できる1次元の速度 (3.1.86) の値に等しいものと見なせる.

$$x_1'(t_{1r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1(t_{1r} + h) - x_1(t_{1r})}{h} \dots (3.1.86)$$

$$\frac{\Delta x_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = x_1'(t_{1r}), (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.87) \text{ 平均値の定理}$$

区間 (3.1.83) 内に微分係数 (3.1.88) を仮定する. 微分積分学での平均値の定理を使用すると, (3.1.89) が成立する. 平均値の定理 (3.1.89) では, 平均変化率 (3.1.68) は区間 (3.1.83) 内に存在する微分係数 (3.1.88) に等しい値であることを意味する. 微分係数 (3.1.88) は 3章2節で定義する1次元の速度になる. このことから, 平均変化率 (3.1.68) は区間 (3.1.83) 内に記述できる1次元の速度 (3.1.88) の値に等しいものと見なせる.

$$y_1'(t_{1r}) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1(t_{1r} + h_1) - y_1(t_{1r})}{h_1} \dots (3.1.88)$$

$$\frac{\Delta y_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = y_1'(t_{1r}), (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.89) \text{ 平均値の定理}$$

区間 (3.1.83) 内に微分係数 (3.1.90) を仮定する. 微分積分学での平均値の定理を使用すると, (3.1.91) が成立する. 平均値の定理 (3.1.91) では, 平均変化率 (3.1.72) は区間 (3.1.83) 内に存在する微分係数 (3.1.90) に等しい値であることを意味する. 微分係数 (3.1.90) は 3章2節で定義する1次元の速度になる. このことから, 平均変化率 (3.1.72) は区間 (3.1.83) 内に記述できる1次元の速度 (3.1.90) の値に等しいものと見なせる.

$$z_1'(t_{1r}) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1(t_{1r} + h_1) - z_1(t_{1r})}{h_1} \dots (3.1.90)$$

$$\frac{\Delta z_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = z_1'(t_{1r}), (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.91) \text{ 平均値の定理}$$

慣性座標系 S_1 の位置の隔たり (3.1.5) および時点の隔たり (2.2.7) を使用して, 平均変化率 (3.1.65) を計算する. 慣性座標系 S_1 の x_1 成分の平均変化率 (3.1.65) に (3.1.5) および (2.2.7) を代入して, (3.1.99) を記述できる. 平均変化率 (3.1.99) は (3.1.100) に書き直すことができる. (3.1.100) の右辺には慣性座標系 S の x 成分の平均変化率 (3.1.64) を記述している. (3.1.100) では, 慣性座標系 S_1 の x_1 成分の平均変化率 (3.1.65) と慣性座標系 S の x 成分の平均変化率 (3.1.64) の関係を示している.

$$\Delta x_{f1mn} = \gamma \cdot \Delta x_{fmn} - u \cdot \gamma \cdot \Delta t_{mn} \dots (3.1.5)$$

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{fmn} \dots (2.2.7)$$

$$\frac{\Delta x_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = \frac{\gamma \cdot \Delta x_{fmn} - u \cdot \gamma \cdot \Delta t_{mn}}{\gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{fmn}}, (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.99)$$

$$\frac{\Delta x_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = \frac{\frac{\Delta x_{f mn}}{\Delta t_{mn}} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{f mn}}{\Delta t_{mn}}}, (\Delta t_{1mn} \neq 0, \Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.100)$$

慣性座標系 S_1 の位置の隔たり—— y 成分および y_1 成分で記述するもの。—— および時点の隔たり (2.2.7) を使用して、慣性座標系 S_1 の y_1 成分の平均変化率 (3.1.68) を計算する。ローレンツ変換の (2.19) を使用すると、(3.1.43) および (3.1.44) から位置の隔たり (3.1.101) を記述できる。慣性座標系 S_1 の y_1 成分の平均変化率 (3.1.68) に位置の隔たり (3.1.101) および時点の隔たり (2.2.7) を代入して、(3.1.102) を記述できる。平均変化率 (3.1.102) は (3.1.103) に書き直すことができる。(3.1.103) の右辺には慣性座標系 S の y 成分の平均変化率 (3.1.66) および慣性座標系 S の x 成分の平均変化率 (3.1.64) を記述している。(3.1.103) では、慣性座標系 S_1 の y_1 成分の平均変化率 (3.1.68)、慣性座標系 S の y 成分の平均変化率 (3.1.66) および慣性座標系 S の x 成分の平均変化率 (3.1.64) の関係を示している。

$$y_1 = y \dots (2.19)$$

$$y_{1m} = y_m \dots (3.1.43)$$

$$y_{1n} = y_n \dots (3.1.44)$$

$$\Delta y_{f1mn} = \Delta y_{f mn} \dots (3.1.101)$$

$$\frac{\Delta y_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = \frac{\Delta y_{f mn}}{\gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{f mn}}, (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.102)$$

$$\frac{\Delta y_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = \frac{\frac{\Delta y_{f mn}}{\Delta t_{mn}}}{\gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{f mn}}{\Delta t_{mn}} \right)}, (\Delta t_{1mn} \neq 0, \Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.103)$$

慣性座標系 S_1 の位置の隔たり—— z 成分および z_1 成分で記述するもの。—— および時点の隔たり (2.2.7) を使用して、慣性座標系 S_1 の z_1 成分の平均変化率 (3.1.72) を計算する。ローレンツ変換の (2.20) を使用すると、(3.1.50) および (3.1.51) から位置の隔たり (3.1.104) を記述できる。慣性座標系 S_1 の z_1 成分の平均変化率 (3.1.72) に位置の隔たり (3.1.104) および時点の隔たり (2.2.7) を代入して、(3.1.105) を記述できる。平均変化率 (3.1.105) は (3.1.106) に書き直すことができる。(3.1.106) の右辺には慣性座標系 S の z 成分の平均変化率 (3.1.70) および慣性座標系 S の x 成分の平均変化率 (3.1.64) を記述している。(3.1.106) では、慣性座標系 S_1 の z_1 成分の平均変化率 (3.1.72)、慣性座標系 S の z 成分の平均変化率 (3.1.70) および慣性座標系 S の x 成分の平均変化率 (3.1.64) の関係を示している。

$$z_1 = z \dots (2.20)$$

$$z_{1m} = z_m \dots (3.1.50)$$

$$z_{1n} = z_n \dots (3.1.51)$$

$$\Delta z_{f1mn} = \Delta z_{f mn} \dots (3.1.104)$$

$$\frac{\Delta z_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = \frac{\Delta z_{f mn}}{\gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{f mn}}, (\Delta t_{1mn} \neq 0) \dots (3.1.105)$$

$$\frac{\Delta z_{f1mn}}{\Delta t_{1mn}} = \frac{\frac{\Delta z_{fmn}}{\Delta t_{mn}}}{\gamma \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{fmn}}{\Delta t_{mn}} \right)}, (\Delta t_{1mn} \neq 0, \Delta t_{mn} \neq 0) \dots (3.1.106)$$

(3.1.100), (3.1.103) および (3.1.106) の右辺の分母には零にならないことを仮定している. これらの式の右辺の分母では, (2.2.57) の考察のように——平均値の定理を使用する——平均変化率と或る時点に対応する速度との関係で解釈を与えることができる.

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{fmn}}{h} \neq 0, (h \neq 0) \dots (2.2.57)$$

3章1節では位置の隔たりおよび時点の隔たりを使用して平均変化率を或る時点に対応する速度に見なして考察してきた. 3章1節では, 時点に対応する速度を既に学んでいることを前提にした. しかし, 著者の経験では, 日本の大学課程の専門書で定義されている速度では本書の採用する立場と異なるものがある——このことは本書のまえがきでも説明した. ——. このために, 3章2節では, 本書で使用している時点に対応する速度を定義する. この速度は, 質点を使用して定義する——時点を独立変数とする——1変数についての関数になる速度になる. 3章2節で定義する速度でも位置の隔たりおよび時点の隔たりを使用する.

3.2 速度の定義から考察する位置の微分および時点の微分の関係

慣性座標系 S に質点を仮定する. この質点の空間成分の座標を記述する x 成分の関数を (3.2.1), y 成分の関数を (3.2.2) および z 成分の関数を (3.2.3) で与える. (3.2.1) ~ (3.2.3) は質点の位置を与える関数である.

$x = x^p(t) \dots (3.2.1)$ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の x 成分の関数

$y = y^p(t) \dots (3.2.2)$ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の y 成分の関数

$z = z^p(t) \dots (3.2.3)$ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標 z 成分の関数

同様に, 慣性座標系 S₁ に質点を仮定する. この質点の空間成分の座標を記述する x₁ 成分の関数を (3.2.4), y₁ 成分の関数を (3.2.5) および z₁ 成分の関数を (3.2.6) で与える. (3.2.4) ~ (3.2.6) は質点の位置を与える関数である.

$x_1 = x_1^p(t_1) \dots (3.2.4)$ 慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す座標の x₁ 成分の関数

$y_1 = y_1^p(t_1) \dots (3.2.5)$ 慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す座標の y₁ 成分の関数

$z_1 = z_1^p(t_1) \dots (3.2.6)$ 慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す座標の z₁ 成分の関数

本書では, (3.2.1) ~ (3.2.6) は実数のみを扱うものとする. 本書の (3.2.1) ~ (3.2.6) ではその定義区間内で微分係数を保証する. 3章2節では, 次のように速度の定義を与え, 位置の微分および時点の微分の関係を考察する. (3.2.1) ~ (3.2.3) の関数を使用して, 慣性座標系 S に仮定した質点の速度を定義する. そして, その速度を微分で記述する. これらの後に, (3.2.4) ~ (3.2.6) の関数を使用して, 慣性座標系 S₁ に仮定した質点の速度を定義する. そして, その速度を微分で定義する.

慣性座標系 S に仮定した質点の位置ベクトルは (3.2.7) で記述できるものとする. ただし, 位置ベクトル (3.2.7) の各成分は (3.2.1) ~ (3.2.3) を使用する.

$$\mathbf{r}(t) = x^p \mathbf{i} + y^p \mathbf{j} + z^p \mathbf{k} \dots (3.2.7)$$

同様に, 慣性座標系 S₁ に仮定した質点の位置ベクトルは (3.2.8) で記述できるものとする. ただし, 位置ベクトル (3.2.8) の各成分は (3.2.4) ~ (3.2.6) を使用する.

$$\mathbf{r}_1(t_1) = x_1^p \mathbf{i}_1 + y_1^p \mathbf{j}_1 + z_1^p \mathbf{k}_1 \dots (3.2.8)$$

慣性座標系 S の時点に (3.2.9) を仮定する. 慣性座標系 S の時点の隔たりには (3.2.10) を定義する. 慣性座標系 S

の時点の隔たり (3.2.10) は (3.2.9) の右辺の第二項を変数とした関数である。この時点の隔たり (3.2.10) は (3.2.9) の右辺の第一項に記述した時点からの隔たりである。慣性座標系 S の時点 (3.2.9) および時点の隔たり (3.2.10) を使用すると、時点の隔たり (3.2.11) になる。慣性座標系 S の時点の隔たり (3.2.11) は (3.2.9) の右辺の第二項である。

(3.2.9) の右辺の第一項は慣性座標系 S の任意の定数となる時点とする。ただし、(3.2.9) の右辺の第一項および左辺は関数 (3.2.1) ~ (3.2.3) の定義区間内の時点である。

$$t_p = t + h \dots (3.2.9)$$

$$\Delta t(h) \equiv t_p - t \dots (3.2.10)$$

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \dots (3.2.11)$$

慣性座標系 S の x 軸のみの 1 次元では、速度を微分係数 (3.2.12) で定義できる。(3.2.12) は (3.2.9) の右辺の第一項に記述した時点を変数とした微分係数であるので定数になる。そして、(3.2.9) の右辺の第一項に記述した時点を他の定数に変えることで、速度である微分係数 (3.2.12) の値は変わることがある。(3.2.12) の極限值が存在する時点の区間で速度 (3.2.12) は定義される。速度 (3.2.12) は (3.2.9) の右辺の第一項に記述した時点に対応する x 成分の関数 (3.2.1) の値に接点をもつ接線の傾きである。一般に、慣性座標系 S の x 軸のみの 1 次元で定義した速度 (3.2.12) は正負および零の値をとることが可能である。

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

1 次元での速度 (3.2.12) を使用して、慣性座標系 S に仮定した質点の位置ベクトル (3.2.7) の x 成分になる位置の関数 (3.2.1) の微分は (3.2.13) で定義できる。(3.2.13) は速度 (3.2.12) の左辺および時点の隔たり (3.2.11) の右辺との積である。位置の微分 (3.2.13) は速度 (3.2.12) を定義した時点—— (3.2.12) の左辺に記述した (3.2.9) の右辺の第一項のこと。——を含めた区間で定義されている。微分 (3.2.13) は傾きを 1 次元での速度 (3.2.12) として、独立変数を (3.2.11) の右辺とする線形のグラフを描く関数である。ただし、一般的には、(3.2.13) が定義されている区間内では (3.2.9) の右辺の第一項に対応する関数 (3.2.1) の値に接点をもつ接線の方程式として、(3.2.13) を扱うことができる。

$$dx^p(t) \equiv v_x(t) \cdot h \dots (3.2.13)$$

慣性座標系 S の x 軸のみの 1 次元で定義した速度 (3.2.12) と同様に、y 軸および z 軸のみの 1 次元で速度および位置の関数の微分を定義する。微分係数 (3.2.14) は慣性座標系 S の y 軸のみの 1 次元で定義した速度である。速度 (3.2.14) を使用して、慣性座標系 S に仮定した質点の位置ベクトル (3.2.7) の y 成分になる位置の関数の微分は (3.2.15) で定義できる。

$$v_y(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \dots (3.2.14)$$

$$dy^p(t) \equiv v_y(t) \cdot h \dots (3.2.15)$$

微分係数 (3.2.16) は慣性座標系 S の z 軸のみの 1 次元で定義した速度である。微分係数 (3.2.16) は慣性座標系 S の z 軸のみの 1 次元で定義した速度である。速度 (3.2.16) を使用して、慣性座標系 S に仮定した質点の位置ベクトル (3.2.7) の z 成分になる位置の関数の微分は (3.2.17) で定義できる。

$$v_z(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \dots (3.2.16)$$

$$dz^p(t) \equiv v_z(t) \cdot h \dots (3.2.17)$$

慣性座標系 S の t 成分になる時点の微分を (3.2.18) で定義する。時点の微分 (3.2.18) では微分係数 (3.2.19) を仮

定している。時点の微分 (3.2.18) は微分係数 (3.2.19) を定義した時点—— (3.2.19) の左辺に記述した (3.2.9) の右辺の第一項のこと。——を含めた区間内で定義されている。(3.2.18) は傾きが (3.2.19) の 1 であり、時点の隔たり (3.2.11) を一つの独立変数とする関数である。微分係数 (3.2.19) は、独立変数 (3.2.20) が従属変数に等しい関数——従属変数 = 独立変数となる t ——の微分係数である。

$$dt \equiv A(t) \cdot h = h \dots (3.2.18)$$

$$A(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t+h) - (t)}{h} = 1 \dots (3.2.19)$$

$$t \dots (3.2.20)$$

(3.2.18) を使用すると、(3.2.13)、(3.2.15) および (3.2.17) はそれぞれ (3.2.21)、(3.2.22) および (3.2.23) に書き直すことができる。(3.2.21)、(3.2.22) および (3.2.23) では、位置の微分および時点の微分で、次の関係を記述している。定数となる速度を係数とし、独立変数になる時点の微分についての関数に位置の微分がなることを記述している。

$$dx^p(t) = v_x(t) \cdot dt \dots (3.2.21)$$

$$dy^p(t) = v_y(t) \cdot dt \dots (3.2.22)$$

$$dz^p(t) = v_z(t) \cdot dt \dots (3.2.23)$$

時点の微分 (3.2.24) が成立するならば、(3.2.21) ~ (3.2.23) はそれぞれ (3.2.25) ~ (3.2.27) に記述できる。 x 軸、 y 軸および z 軸のそれぞれのみの 1 次元で定義した速度が、微分を使用して (3.2.25) ~ (3.2.27) のように記述できる。

$$dt \neq 0 \dots (3.2.24)$$

$$v_x = \frac{dx^p}{dt} \dots (3.2.25) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の } x \text{ 軸のみの 1 次元で定義した速度である。}$$

$$v_y = \frac{dy^p}{dt} \dots (3.2.26) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の } y \text{ 軸のみの 1 次元で定義した速度である。}$$

$$v_z = \frac{dz^p}{dt} \dots (3.2.27) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の } z \text{ 軸のみの 1 次元で定義した速度である。}$$

慣性座標系 S の 1次元で定義した速度 (3.2.12)、(3.2.14) および (3.2.16) の速さは (3.2.28) のように各速度の絶対値で定義できる。速さ (3.2.28) は 0 以上の実数である。

$$|v_x|, |v_y|, |v_z| \dots (3.2.28)$$

慣性座標系 S での 3次元空間——ここでは、 x 軸、 y 軸および z 軸で与える空間のことである。——での速度は (3.2.28) で定義できる。速度 (3.2.28) はベクトルの微分の記号を使用して (3.2.29) で記述できる。

$$\mathbf{v}(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \dots (3.2.28) \text{ 3次元空間での速度の定義}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \dots (3.2.29)$$

(3.2.28) の右辺は (3.2.30) で記述できる。(3.2.30) の極限値の記号は (3.2.31) のように使用できる。(3.2.31) の右辺の各成分は 1次元で定義した速度であるので、(3.2.32) になる。慣性座標系 S での 3次元空間の速度は速度ベクトル (3.2.32) で記述できる。慣性座標系 S での 3次元空間で定義した速度ベクトル (3.2.32) の速さは (3.2.33) で定義

できる.

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \mathbf{i} + \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \mathbf{j} + \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \mathbf{k} \right) \dots (3.2.30)$$

$$\mathbf{v}(t) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \mathbf{i} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \mathbf{j} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \mathbf{k} \right) \dots (3.2.31)$$

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \dots (3.2.32)$$

$$|\mathbf{v}(t)| \equiv \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \dots (3.2.33)$$

一般に、慣性座標系 S の 1 次元で定義した速度 (3.2.12), (3.2.14) および (3.2.16) は正負および零の値をとることが可能である. 一方、慣性座標系 S での 3 次元空間の速度ベクトル (3.2.32) は 1 次元で定義した速度 (3.2.12), (3.2.14) および (3.2.16) の組み合わせ (3.2.34) と等しいものと扱える. しかし、3 次元空間の速度 (3.2.34) はベクトル量であるので、本書では 3 次元の速度ベクトルは正負をもった量で記述できないものと解釈する——マイナス記号とベクトル量との関係⁵⁾ ⁶⁾ は付録 iv で説明した. ——.

$$\mathbf{v}(t) = (v_x, v_y, v_z) \dots (3.2.34)$$

(3.2.35) が成立する場合は、速度ベクトル (3.2.35) の速さは (3.2.36) になる. 同様に、(3.2.37) および (3.2.38) が成立する.

$$\mathbf{v}(t) = (v_x, 0, 0) \dots (3.2.35)$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |v_x| \geq 0 \dots (3.2.36)$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |v_y| \geq 0, (\mathbf{v}(t) = (0, v_y, 0)) \dots (3.2.37)$$

$$|\mathbf{v}(t)| = |v_z| \geq 0, (\mathbf{v}(t) = (0, 0, v_z)) \dots (3.2.38)$$

ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) では慣性座標系の原点を光源とした光の球面の方程式 (2.7) および (2.9) が連立方程式として成立する. このことから、ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) の慣性座標系 S および慣性座標系 S₁ の空間の成分と時点の成分は、常に光速の不変の原理を使用した関係式 (2.7) および (2.9) の連立方程式を満足する. そして、ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) では常に (2.13) が成立する. このことから、慣性座標系 S および慣性座標系 S₁ のそれぞれの原点に在る光源から伝搬する光には (2.7) および (2.9) が成立することを説明できる. ただし、それぞれの慣性座標系の原点が一致したときに、(2.8) および (2.10) を満足するものとする.

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \dots (2.18)$$

$$y_1 = y \dots (2.19)$$

$$z_1 = z \dots (2.20)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \dots (2.21)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2 \dots (2.7)$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c^2 \cdot t_1^2 \dots (2.9)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 \cdot t_1^2 \dots (2.13)$$

$$(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) \dots (2.8) \text{ 慣性座標系 S の空間および時点の成分で与えた座標}$$

$$(x_1, y_1, z_1, t_1) = (0, 0, 0, 0) \dots (2.10) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の空間および時点の成分で与えた座標}$$

ローレンツ変換の (2.18) ~ (2.20) の左辺で慣性座標系 S₁ の空間座標 (3.2.39) を与えることができる. ローレンツ

変換 (2.18) ~ (2.21) の右辺の変数を使用して、慣性座標系 S の空間座標 (3.2.40) を与えることができる。慣性座標系 S の空間座標 (3.2.40) の位置に対応する時計で表す時点を (3.2.41) とする。慣性座標系 S の空間座標 (3.2.40) の時計で表す時点 (3.2.41) に対応する慣性座標系 S₁ の時点 (3.2.42) はローレンツ変換の (2.21) で与える。慣性座標系 S₁ の時点 (3.2.42) は慣性座標系 S₁ の空間座標 (3.2.39) に対応する時計で表す。

$(x_1, y_1, z_1) \dots$ (3.2.39) 慣性座標系 S₁ の空間の成分で与えた空間座標

$(x, y, z) \dots$ (3.2.40) 慣性座標系 S の空間の成分で与えた空間座標

$t \dots$ (3.2.41) 慣性座標系 S の時点の成分で与えた時点の座標

$t_1 \dots$ (3.2.42) 慣性座標系 S₁ の時点の成分で与えた時点の座標

アインシュタインの特殊相対性理論の座標は空間座標および時点の座標の組み合わせで1つの座標を与えることができる。この空間座標および時点の座標の組み合わせで与える座標は次のように表示できる。慣性座標系 S の空間座標 (3.2.40) および時点 (3.2.41) で4次元の座標 (3.2.43) を与える。慣性座標系 S₁ の空間座標 (3.2.39) および時点 (3.2.42) で4次元の座標 (3.2.44) を与える。

$(x, y, z, t) \dots$ (3.2.43) 慣性座標系 S の空間および時点の成分で与えた4次元の座標

$(x_1, y_1, z_1, t_1) \dots$ (3.2.44) 慣性座標系 S₁ の空間および時点の成分で与えた4次元の座標

4次元の座標 (3.2.43) は4次元の座標 (3.2.45) に書き直されることがある。(3.2.45) では (3.2.46) を仮定している。同様に、4次元の座標 (3.2.44) は4次元の座標 (3.2.47) に書き直されることがある。(3.2.47) では (3.2.48) を仮定している。

$(x^0, x^1, x^2, x^3) \dots$ (3.2.45)

$x^0 = c \cdot t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \dots$ (3.2.46)

$(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3) \dots$ (3.2.47)

$x_1^0 = c \cdot t_1, x_1^1 = x_1, x_1^2 = y_1, x_1^3 = z_1 \dots$ (3.2.48)

特殊相対性理論では (3.2.45) および (3.2.47) のような座標を使用して、4次元の速度ベクトルを与えることがある。しかし、本書では3次元の速度ベクトルの変換を説明することを趣旨にしているので、4次元の速度ベクトルの説明⁷⁾ はしない。ただし、その4次元の速度ベクトルからも3次元の速度ベクトルを導出できる。

慣性座標系 S の3次元の速度を定義したように、慣性座標系 S₁ の3次元の速度を定義する。慣性座標系 S₁ の x₁ 軸、y₁ 軸および z₁ 軸のそれぞれのみでの1次元での速度の定義をする。そして、慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す関数 (3.2.4) ~ (3.2.6) を使用して、慣性座標系 S₁ の3次元の速度を定義する。

$x_1 = x_1^p(t_1) \dots$ (3.2.4) 慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す座標の x₁ 成分の関数

$y_1 = y_1^p(t_1) \dots$ (3.2.5) 慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す座標の y₁ 成分の関数

$z_1 = z_1^p(t_1) \dots$ (3.2.6) 慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す座標の z₁ 成分の関数

慣性座標系 S₁ の時点 (3.2.49) を与える。慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (3.2.50) を定義する。時点の隔たり (3.2.50) は、時点 (3.2.49) の右辺の第二項を独立変数とする1変数についての関数である。

$t_{p1} = t_1 + h_1 \dots$ (3.2.49)

$\Delta t_1(h_1) \equiv t_{p1} - t_1 = h_1 \dots$ (3.2.50)

慣性座標系 S₁ の x₁ 軸のみの1次元では、速度を微分係数 (3.2.51) で定義できる。1次元での速度 (3.2.51) を使用して、慣性座標系 S₁ に仮定した質点の位置ベクトル (3.2.8) の x₁ 成分になる位置の関数の微分は (3.2.52) で定義できる。

$$v_{x_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.51)$$

$$\mathbf{r}_1(t_1) = x_1^p \mathbf{i}_1 + y_1^p \mathbf{j}_1 + z_1^p \mathbf{k}_1 \dots (3.2.8)$$

$$dx_1^p(t_1) \equiv v_{x_1}(t_1) \cdot h_1 \dots (3.2.52)$$

慣性座標系 S_1 の y_1 軸のみの 1 次元では、速度を微分係数 (3.2.53) で定義できる。1 次元での速度 (3.2.53) を使用して、慣性座標系 S_1 に仮定した質点の位置ベクトル (3.2.8) の y_1 成分になる位置の関数の微分は (3.2.54) で定義できる。

$$v_{y_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.53)$$

$$dy_1^p(t_1) \equiv v_{y_1}(t_1) \cdot h_1 \dots (3.2.54)$$

慣性座標系 S_1 の z_1 軸のみの 1 次元では、速度を微分係数 (3.2.55) で定義できる。1 次元での速度 (3.2.55) を使用して、慣性座標系 S_1 に仮定した質点の位置ベクトル (3.2.8) の z_1 成分になる位置の関数の微分は (3.2.56) で定義できる。

$$v_{z_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.55)$$

$$dz_1^p(t_1) \equiv v_{z_1}(t_1) \cdot h_1 \dots (3.2.56)$$

慣性座標系 S_1 の t_1 成分になる時点の微分を (3.2.57) で定義する。時点の微分 (3.2.57) では微分係数 (3.2.58) を仮定している。時点の微分 (3.2.57) は微分係数 (3.2.58) を定義した時点—— (3.2.58) の左辺に記述した (3.2.49) の右辺の第一項のこと。——を含めた区間内で定義されている。

$$dt_1 \equiv A_1(t_1) \cdot h_1 = h_1 \dots (3.2.57)$$

$$A_1(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{(t_1 + h_1) - (t_1)}{h_1} = 1 \dots (3.2.58)$$

慣性座標系 S_1 の時点の微分 (3.2.59) を満足する場合を仮定する。(3.2.59) が成立する場合は、(3.2.52)、(3.2.54) および (3.2.56) を使用して、1 次元での速度をそれぞれ (3.2.60) ~ (3.2.62) で記述できる。

$$dt_1 \neq 0 \dots (3.2.59)$$

$$v_{x_1} = \frac{dx_1^p}{dt_1} \dots (3.2.60)$$

$$v_{y_1} = \frac{dy_1^p}{dt_1} \dots (3.2.61)$$

$$v_{z_1} = \frac{dz_1^p}{dt_1} \dots (3.2.62)$$

1 次元での速度のそれぞれ (3.2.51)、(3.2.53) および (3.2.55) の速さは、(3.2.63) のそれぞれの速度の絶対値で定義できる。速さ (3.2.63) は 0 以上の実数である。

$$|v_{x_1}|, |v_{y_1}|, |v_{z_1}| \dots (3.2.63)$$

慣性座標系 S_1 の位置ベクトル (3.2.8) を使用して、3 次元の速度ベクトル (3.2.64) を定義できる。速度 (3.2.64) はベクトルの微分の記号を使用して (3.2.65) で記述できる。

$$\mathbf{r}_1(t_1) = x_1^p \mathbf{i}_1 + y_1^p \mathbf{j}_1 + z_1^p \mathbf{k}_1 \dots (3.2.8)$$

$$\mathbf{v}_1(t_1) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_1(t_1 + h) - \mathbf{r}_1(t_1)}{h} \dots (3.2.64)$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt_1} \dots (3.2.65)$$

1次元でのそれぞれの速度 (3.2.51), (3.2.53) および (3.2.55) を使用して, 3次元の速度ベクトル (3.2.64) は (3.2.66) で記述できる. 3次元の速度ベクトル (3.2.64) の速さは (3.2.67) で定義できる.

$$\mathbf{v}_1(t_1) = v_{x1}\mathbf{i}_1 + v_{y1}\mathbf{j}_1 + v_{z1}\mathbf{k}_1 \dots (3.2.66)$$

$$|\mathbf{v}_1(t_1)| \equiv \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2 + v_{z1}^2} \dots (3.2.67)$$

(3.2.1) をローレンツ変換の (2.21) の右辺に代入すると, (3.2.68) を記述できる. (3.2.68) を使用して, (3.2.68) の左辺の時点の微分係数を (2.28) で計算する.

$x = x^p(t) \dots$ (3.2.1) 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の x 成分の関数

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \dots (2.21)$$

$$t_1(t) = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x^p(t)}{c^2} \right) \dots (3.2.68)$$

$$t_1'(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (2.28)$$

(3.2.68) を使用すると, 時点の微分係数 (2.28) は (3.2.69) で記述できる. 時点の微分係数 (3.2.69) の右辺は, (3.2.70) の右辺に記述できる.

$$t_1'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma \cdot \left(t+h - \frac{u}{c^2} \cdot x^p(t+h) \right) - \gamma \cdot \left(t - \frac{u}{c^2} \cdot x^p(t) \right)}{h} \dots (3.2.69)$$

$$t_1'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma \cdot \left(t+h - \frac{u}{c^2} \cdot x^p(t+h) \right) - \gamma \cdot \left(t - \frac{u}{c^2} \cdot x^p(t) \right)}{h} = \gamma - \gamma \cdot \frac{u}{c^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.70)$$

(3.2.70) の右辺には速度 (3.2.12) が記述されている. (3.2.18) および (3.2.24) から導出できる (3.2.71) の左辺は, 速度となる微分係数 (3.2.12) の右辺の変数となる h とは異なる.

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

$$dt \equiv A(t) \cdot h = h \dots (3.2.18) \text{ 時点の微分}$$

$$dt \neq 0 \dots (3.2.24)$$

$$h \neq 0 \dots (3.2.71)$$

速度 (3.2.12) を使用すると, 時点の微分係数 (3.2.70) は (3.2.72) に記述できる. 時点の微分係数 (3.2.72) の右辺は (3.2.73) の右辺に整理できる.

$$t_1'(t) = \gamma - \gamma \cdot \frac{u}{c^2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} = \gamma - \gamma \cdot \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \dots (3.2.72)$$

$$t_1'(t) = \gamma - \gamma \cdot \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.2.73)$$

時点の微分係数 (2.37) の右辺に (3.2.73) を代入すると, (3.2.74) になる. ただし, 時点の微分係数 (3.2.74) には (2.22) を仮定している. また, 時点の微分係数 (3.2.74) の左辺には, (2.36) が仮定されているが, (2.36) は (3.2.24) および (3.2.71) に一致する.

$$\frac{dt_1(t)}{dt} = t_1'(t) \dots (2.37) \text{ 時点の微分係数}$$

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots (3.2.74)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \dots (2.22)$$

$$dt \neq 0 \dots (2.36)$$

時点の微分係数 (3.2.74) の右辺の速度に (3.2.75) を仮定する. 速度 (3.2.75) を使用すると, 時点の微分係数 (3.2.74) は (3.2.76) になる.

$$v_x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} = 0 \dots (3.2.75)$$

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots (3.2.76)$$

時点の微分係数 (3.2.76) を時点の微分 (3.2.77) に書き直す. 時点の隔たり (3.2.71) を使用すると, 時点の隔たり (3.2.11) の左辺は (3.2.78) になる.

$$dt_1 = \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots (3.2.77)$$

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \dots (3.2.11) \text{ 時点の隔たり}$$

$$\Delta t(h) \neq 0 \dots (3.2.78) \text{ 時点の隔たり}$$

時点の隔たり (3.2.11) および (3.2.18) を使用すると, 時点の微分 (3.2.77) は (3.2.79) に記述できる. (3.2.78) から (3.2.79) の右辺は零にはならない.

$$dt \equiv A(t) \cdot h = h \dots (3.2.18)$$

$$dt_1 = \frac{\Delta t(h)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots (3.2.79)$$

時点の微分 (3.2.79) および 2 章 2 節で考察した時点の隔たり (2.2.6) から導出した時点の隔たり (2.2.35) を比較す

る. (2.22) を使用すると, 時点の隔たり (2.2.35) を (3.2.80) に記述できる.

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{f mn} \right) \dots (2.2.6)$$

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \Delta t_{mn} \dots (2.2.35)$$

$$\Delta t_{1mn} = \frac{\Delta t_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \dots (3.2.80)$$

時点の微分 (3.2.79) の右辺の分子および時点の隔たり (3.2.80) の右辺の分子に (3.2.81) を仮定すると, (3.2.82) が成立する. (3.2.82) の左辺は微分 (3.2.79) の左辺である. (3.2.82) の右辺は時点の隔たり (3.2.80) の左辺である. ただし, この議論では (3.2.81) および (3.2.82) はそれぞれ零になることはできない.

$$\Delta t(h) = \Delta t_{mn} (\neq 0) \dots (3.2.81) \text{ 仮定}$$

$$dt_1 = \Delta t_{1mn} (\neq 0) \dots (3.2.82)$$

3.3 速度の変換の導出

3章2節では, 速度の定義をした. 3章2節で定義した1次元および3次元の速度は, ニュートンの三つの運動の法則でも使用できるものである. それらの速度の定義を使用すると, その特殊相対性理論で使用する二つの慣性座標系間の速度の変換はニュートンの三つの運動の法則で使用するものとは異なる. 3章3節ではアインシュタインの特殊相対性理論で使用する二つの慣性座標系間の速度の変換を導出する.

慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の x 成分, y 成分および z 成分の関数を (3.2.1) ~ (3.2.3) で与える. 同様に, 慣性座標系 S₁ の質点の位置を示す座標の x₁ 成分, y₁ 成分および z₁ 成分の関数を (3.2.4) ~ (3.2.6) で与える.

$$x = x^p(t) \dots (3.2.1) \text{ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の x 成分の関数}$$

$$y = y^p(t) \dots (3.2.2) \text{ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の y 成分の関数}$$

$$z = z^p(t) \dots (3.2.3) \text{ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の z 成分の関数}$$

$$x_1 = x_1^p(t_1) \dots (3.2.4) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の質点の位置を示す座標の } x_1 \text{ 成分の関数}$$

$$y_1 = y_1^p(t_1) \dots (3.2.5) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の質点の位置を示す座標の } y_1 \text{ 成分の関数}$$

$$z_1 = z_1^p(t_1) \dots (3.2.6) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の質点の位置を示す座標の } z_1 \text{ 成分の関数}$$

3章3節では, (3.2.1) ~ (3.2.6) で使用する変数はすべて実数の区間で定義されているものと仮定する. このことは, 変数 (3.3.1) ~ (3.3.8) で記述するものとする. 変数 (3.3.1) ~ (3.3.8) の右辺の **R** は実数の集合を意味する.

$$t \in \mathbf{R}_t \dots (3.3.1) \text{ 慣性座標系 S の時点}$$

$$t_1 \in \mathbf{R}_{t_1} \dots (3.3.2) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の時点}$$

$$x^p(t) \in \mathbf{R}_x \dots (3.3.3) \text{ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の x 成分}$$

$$y^p(t) \in \mathbf{R}_y \dots (3.3.4) \text{ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の y 成分}$$

$$z^p(t) \in \mathbf{R}_z \dots (3.3.5) \text{ 慣性座標系 S の質点の位置を示す座標の z 成分}$$

$$x_1^p(t_1) \in \mathbf{R}_{x_1} \dots (3.3.6) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の質点の位置を示す座標の } x_1 \text{ 成分}$$

$$y_1^p(t_1) \in \mathbf{R}_{y_1} \dots (3.3.7) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の質点の位置を示す座標の } y_1 \text{ 成分}$$

$$z_1^p(t_1) \in \mathbf{R}_{z_1} \dots (3.3.8) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ の質点の位置を示す座標の } z_1 \text{ 成分}$$

ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) を使用する. 3章3節では, 質点の情報となる変数 (3.3.1) ~ (3.3.8) をローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) に使用する.

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \dots (2.18)$$

$$y_1 = y \cdots (2.19)$$

$$z_1 = z \cdots (2.20)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \cdots (2.21)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \cdots (2.22)$$

質点の位置を示す関数 (3.2.1) ~ (3.2.6) をローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) に代入すると, (3.3.9) ~ (3.3.12) を記述できる. ローレンツ変換の (3.3.9) ~ (3.3.11) の左辺は, 慣性座標系 S_1 の時点である (3.3.2) の左辺の要素を独立変数とする関数である. ローレンツ変換の (3.3.9) ~ (3.3.11) の右辺は, 慣性座標系 S の時点である (3.3.1) の左辺の要素を独立変数とする関数である.

一方, (3.3.12) の左辺は慣性座標系 S_1 の時点である (3.3.2) の左辺の要素である. (3.3.12) の右辺は慣性座標系 S の時点である (3.3.1) の左辺の要素を独立変数とする関数である.

$$x_1^p(t_1) = \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t) \cdots (3.3.9)$$

$$y_1^p(t_1) = y^p(t) \cdots (3.3.10)$$

$$z_1^p(t_1) = z^p(t) \cdots (3.3.11)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x^p(t)}{c^2} \right) \cdots (3.3.12)$$

そして, ローレンツ変換の (3.3.12) を関数 (3.2.68) に見なすことはできる. 関数 (3.2.68) に関数 (3.3.9) を合成して得られる関数——合成関数のことである.——として, (3.3.13) を記述できる. 同様に, 関数 (3.2.68) に関数 (3.3.10) を合成して得られる関数として, (3.3.14) を記述できる. 関数 (3.2.68) に関数 (3.3.11) を合成して得られる関数として, (3.3.15) を記述できる.

$$t_1(t) = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x^p(t)}{c^2} \right) \cdots (3.2.68)$$

$$x_1^p(t_1(t)) = \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t) \cdots (3.3.13)$$

$$y_1^p(t_1(t)) = y^p(t) \cdots (3.3.14)$$

$$z_1^p(t_1(t)) = z^p(t) \cdots (3.3.15)$$

合成関数 (3.3.13) ~ (3.3.15) はそれぞれ (3.3.16) ~ (3.3.18) に記述できる. ローレンツ変換の (3.3.9) ~ (3.3.11), (3.3.16) ~ (3.3.18) および (3.2.68) を使用して, 速度の変換を導出する.

$$x_1(t) = \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t), (x_1(t) = x_1^p(t_1(t))) \cdots (3.3.16)$$

$$y_1(t) = y^p(t), (y_1(t) = y_1^p(t_1(t))) \cdots (3.3.17)$$

$$z_1(t) = z^p(t), (z_1(t) = z_1^p(t_1(t))) \cdots (3.3.18)$$

速度の変換を導出するのに, 1次元で定義した速度の定義 (3.2.12), (3.2.14), (3.2.16), (3.2.51), (3.2.53) および (3.2.55) を使用する. それらの速度の定義では, 時点の微分 (2.28) を仮定する. 速度の変換の導出を二つの方法で説明をする. 最初に, 合成関数の微分法を使用して速度の変換を導出する. 次に, 1次元の速度の定義式を直接的に使用する方法で速度の変換を導出する.

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \cdots (3.2.12)$$

$$v_y(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \dots (3.2.14)$$

$$v_z(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \dots (3.2.16)$$

$$v_{x_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.51)$$

$$v_{y_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1^p(t_1+h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.53)$$

$$v_{z_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1+h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.55)$$

$$t_1'(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (2.28)$$

慣性座標系 S_1 の時点の微分係数 (2.28) は、等価な表し方では (3.3.19) に書き直すことができる。同様に、慣性座標系 S_1 の 1 次元の速度である微分係数 (3.2.51), (3.2.53) および (3.2.55) は、それぞれ (3.3.20), (3.3.21) および (3.3.22) に書き直すことができる。

$$t_1(t+h) - t_1(t) = t_1'(t) \cdot h + o(h), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.19)$$

$$x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1) = v_{x_1}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1+h_1 \in \mathbf{R}_{t_1} \text{ のとき}) \dots (3.3.20)$$

$$y_1^p(t_1+h_1) - y_1^p(t_1) = v_{y_1}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1+h_1 \in \mathbf{R}_{t_1} \text{ のとき}) \dots (3.3.21)$$

$$z_1^p(t_1+h_1) - z_1^p(t_1) = v_{z_1}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1+h_1 \in \mathbf{R}_{t_1} \text{ のとき}) \dots (3.3.22)$$

(3.3.20) ~ (3.3.22) の右辺の第二項に記述した (3.3.23) の左辺は、(3.3.23) の右辺のようになる。(3.3.23) の右辺に記述した (3.3.24) には (3.3.25) を定義している。(3.3.23) および (3.3.25) の記述から (3.3.26) になることは明らかである。(3.3.26) については付録 ii で説明した。

$$o(h_1) = \alpha(h_1) \cdot h_1, (h_1 \rightarrow 0 \text{ のとき}) \dots (3.3.23)$$

$$\alpha(h_1) \dots (3.3.24)$$

$$\alpha(0) \equiv 0 \dots (3.3.25)$$

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{o(h_1)}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\alpha(h_1) \cdot h_1}{h_1} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \alpha(h_1) = \alpha(0) = 0, (h_1 \rightarrow 0 \text{ のとき}) \dots (3.3.26)$$

時点 (3.3.27) および時点 (3.3.28) を仮定する。(3.2.11) を使用して、(3.2.50) に (3.3.27) および (3.3.28) を代入すると (3.3.29) になる。

$$t_{p_1} = t_1(t_p) \dots (3.3.27)$$

$$t_1 = t_1(t) \dots (3.3.28)$$

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \dots (3.2.11)$$

$$\Delta t_1(h_1) \equiv t_{p_1} - t_1 = h_1 \dots (3.2.50)$$

$$h_1 = t_{p_1} - t_1 = t_1(t_p) - t_1(t) = t_1(t+h) - t_1(t) \dots (3.3.29)$$

(3.3.19) を使用して、(3.3.29) の極限值を (3.3.30) のように記述できる。(3.3.30) の右辺の微分係数には (3.2.73) を使用する。微分係数 (3.2.73) を使用して、(3.3.30) の極限值は (3.3.31) になるものとする。

$$\lim_{h \rightarrow 0} h_1 = \lim_{h \rightarrow 0} (t_1(t+h) - t_1(t)) = \lim_{h \rightarrow 0} (t_1'(t) \cdot h + o(h)), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.30)$$

$$t_1'(t) = \gamma - \gamma \cdot \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right) \dots (3.2.73)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h_1 = \lim_{h \rightarrow 0} (t_1'(t) \cdot h + o(h)) = 0, (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.31)$$

(3.3.31) は (3.3.32) になる. (3.3.32) が成立するならば (3.3.33) を満足する. ただし, (3.3.33) は (3.3.32) が成立することを意味するものとする.

3章3節の議論では (3.2.73) を使用して, (3.3.33) が成立することを前提とした議論をしている. 例えば, (3.2.73) が発散してしまうと, (3.3.32) を保証できない.

$$\lim_{h \rightarrow 0} h_1 = 0 \dots (3.3.32)$$

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } h_1 \rightarrow 0 \dots (3.3.33)$$

(3.3.24) は (3.3.29) の左辺を独立変数とする関数である. (3.3.29) の右辺は, 慣性座標系 S の時点の隔たり (3.2.11) を独立変数とする関数として扱うことができる. この場合では, (3.3.29) の右辺に記述した (3.3.1) の右辺の要素を定数として扱う. このことで, 慣性座標系 S₁ の時点の隔たり (3.3.29) に (3.3.24) を合成して得られた関数——合成関数のことである. ——の極限值を (3.3.34) のように記述できる. ただし, 極限值 (3.3.34) では (3.3.33) を仮定している.

$t \in \mathbf{R}_t \dots (3.3.1)$ 慣性座標系 S の時点

$$\alpha(h_1) = \alpha(t_1(t+h) - t_1(t)) = \beta(h) \rightarrow 0, (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.34)$$

(3.3.29) を使用して, (3.3.23) は (3.3.35) に書き直すことができる. (3.3.19) および (3.3.34) を使用すると, (3.3.35) は (3.3.36) に記述できる. (3.3.36) の右辺でも (3.2.73) を使用する. (3.3.36) の右辺では, (3.2.11) の右辺を変数として扱っている. (3.3.36) の左辺では, (3.2.50) の右辺を変数として扱っている. ただし, (3.3.36) では (3.3.33) を仮定している.

$$o(h_1) = \alpha(h_1) \cdot h_1 = \alpha(t_1(t+h) - t_1(t)) \cdot (t_1(t+h) - t_1(t)), (h_1 \rightarrow 0 \text{ のとき}) \dots (3.3.35)$$

$$t_1(t+h) - t_1(t) = t_1'(t) \cdot h + o(h), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.19)$$

$$o(h_1) = \alpha(t_1(t+h) - t_1(t)) \cdot (t_1(t+h) - t_1(t)) = \beta(h) \cdot (t_1'(t) \cdot h + o(h)), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.36)$$

(3.3.36) の右辺は (3.3.37) に記述できる. (3.3.37) の右辺の第一項の (3.2.73) は定数として扱われる.

$$o(h_1) = \beta(h) \cdot (t_1'(t) \cdot h + o(h)) = \beta(h) \cdot t_1'(t) \cdot h + \beta(h) \cdot o(h), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.37)$$

(3.3.37) は (3.3.38) に記述できる. (3.3.38) の左辺は (3.3.38) の右辺に等しい.

$$o(h_1) = \beta(h) \cdot t_1'(t) \cdot h + \beta(h) \cdot o(h) = o(h), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.38)$$

(3.3.9), (3.3.16), (3.2.68) および (3.3.29) を使用すると, (3.3.39) を記述できる. (3.3.39) の左辺では, (3.2.11) の右辺のみを変数として扱っている. (3.3.39) の右辺では, (3.2.50) の右辺のみを変数として扱っている. そして, (3.3.39) では, (3.3.39) の右辺の第一項に記述してある微分係数 (3.3.40) を仮定している. 微分係数 (3.3.40) は速

度 (3.2.51) に等しいことは明らかである. 微分係数 (3.3.40) および速度 (3.2.51) を使用すると, (3.3.39) の右辺は (3.3.20) の右辺に等しいことがわかる.

$$x_1^p(t_1) = \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t) \dots (3.3.9)$$

$$x_1(t) = \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t), (x_1(t) = x_1^p(t_1(t))) \dots (3.3.16)$$

$$t_1(t) = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x^p(t)}{c^2} \right) \dots (3.2.68)$$

$$x_1(t+h) - x_1(t) = x_1^p(t_1(t+h)) - x_1^p(t_1(t)) = x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1) = x_1^{p'}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1+h_1 \in \mathbf{R}_u \text{ のとき}) \dots (3.3.39)$$

$$x_1^{p'}(t_1) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.3.40)$$

$$v_{x1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.51)$$

$$x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1) = v_{x1}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1+h_1 \in \mathbf{R}_u \text{ のとき}) \dots (3.3.20)$$

(3.3.29) を使用して, (3.3.39) の右辺は (3.3.41) に記述できる. (3.3.19) を使用して, (3.3.41) は (3.3.42) に記述できる. (3.3.42) の右辺では (3.2.73) を仮定している. (3.3.42) は (3.3.43) に記述できる.

$$x_1^p(t+h) - x_1^p(t) = x_1^{p'}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1) = x_1^{p'}(t_1) \cdot (t_1(t+h) - t_1(t)) + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1+h_1 \in \mathbf{R}_u \text{ のとき}) \dots (3.3.41)$$

$$x_1^p(t+h) - x_1^p(t) = x_1^{p'}(t_1) \cdot (t_1(t+h) - t_1(t)) + o(h_1) = x_1^{p'}(t_1) \cdot \left(t_1'(t) \cdot h + o(h) \right) + o(h_1) \dots (3.3.42)$$

$$x_1^p(t+h) - x_1^p(t) = x_1^{p'}(t_1) \cdot \left(t_1'(t) \cdot h + o(h) \right) + o(h_1) = x_1^{p'}(t_1) \cdot t_1'(t) \cdot h + x_1^{p'}(t_1) \cdot o(h) + o(h_1) \dots (3.3.43)$$

(3.3.38) を使用すると, (3.3.43) の右辺は (3.3.44) の右辺に記述できる. (3.3.44) の右辺では, (3.2.11) の右辺のみを変数としている. (3.3.44) は (3.3.45) に書き直すことができる. (3.3.44) の右辺の第二項および第三項は (3.3.45) の右辺の第二項にまとめることができる.

$$x_1^p(t+h) - x_1^p(t) = x_1^{p'}(t_1) \cdot t_1'(t) \cdot h + x_1^{p'}(t_1(t)) \cdot o(h) + o(h_1) = x_1^{p'}(t_1) \cdot t_1'(t) \cdot h + o(h) + o(h), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.44)$$

$$x_1^p(t+h) - x_1^p(t) = x_1^{p'}(t_1) \cdot t_1'(t) \cdot h + x_1^{p'}(t_1(t)) \cdot o(h) + o(h) + o(h) = x_1^{p'}(t_1) \cdot t_1'(t) \cdot h + o(h), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \dots (3.3.45)$$

(3.3.45) は, 等価な表し方では微分係数 (3.3.46) に書き直すことができる. (3.3.46) は合成関数の微分法と呼ばれることがある. 合成関数の微分法 (3.3.46) を使用して, アインシュタインの特殊相対性理論の速度の変換を導出する.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t+h) - x_1^p(t)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (3.3.46)$$

(3.3.46) の右辺には (2.28) を記述している. (2.28) には (3.2.73) を使用するので, 微分係数 (3.3.47) になる.

$$t_1'(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (2.28)$$

$$t_1'(t) = \gamma - \gamma \cdot \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.2.73)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.3.47)$$

(3.2.11) の時点および (3.3.16) を使用して, (3.3.48) を記述できる. (3.3.16) および (3.3.48) を使用して, 位置の隔たり (3.3.49) を記述できる.

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \dots (3.2.11)$$

$$x_1(t) = \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t), (x_1(t) = x_1^p(t_1(t))) \dots (3.3.16)$$

$$x_1(t_p) = \gamma \cdot (x^p(t_p) - u \cdot t_p) \dots (3.3.48)$$

$$x_1(t_p) - x_1(t) = \gamma \cdot (x^p(t_p) - u \cdot t_p) - \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t) \dots (3.3.49)$$

(3.3.49) は (3.3.50) に整理できる. (3.2.11) の右边を使用すると, (3.3.50) は位置の隔たり (3.3.51) になる.

$$x_1(t_p) - x_1(t) = \gamma \cdot \{x^p(t_p) - x^p(t) - u \cdot (t_p - t)\} \dots (3.3.50)$$

$$x_1(t+h) - x_1(t) = \gamma \cdot (x^p(t+h) - x^p(t) - u \cdot h) \dots (3.3.51) \text{位置の隔たり}$$

位置の隔たり (3.3.51) を使用して, (3.3.52) を記述できる. ただし, 位置の隔たり (3.3.52) では (3.3.53) を仮定している. 位置の隔たり (3.3.52) は平均変化率 (3.3.54) に書き直すことができる.

$$x_1(t+h) - x_1(t) = \gamma \cdot \left(\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u \right) \cdot h, (h \neq 0) \dots (3.3.52) \text{位置の隔たり}$$

$$h \neq 0 \dots (3.3.53)$$

$$\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} = \gamma \cdot \left(\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u \right), (h \neq 0) \dots (3.3.54) \text{平均変化率}$$

平均変化率 (3.3.54) の両辺の極限值を (3.3.55) に記述する. 極限值 (3.3.55) の右边は (3.3.56) になる.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \gamma \cdot \left(\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u \right) \right\}, (h \neq 0) \dots (3.3.55)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} = \gamma \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u \right), (h \neq 0) \dots (3.3.56)$$

1次元で定義した速度 (3.2.12) を使用すると, 極限值 (3.3.56) の右边は (3.3.57) に記述できる. 極限值 (3.3.57) の左辺は合成関数の微分法 (3.3.46) の左辺である.

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} = \gamma \cdot (v_x(t) - u), (h \neq 0) \dots (3.3.57)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (3.3.46)$$

(3.2.51), (3.3.47) および (3.3.57) を使用すると, 極限值 (3.3.46) は (3.3.58) に記述できる. (3.3.59) を仮定すると, 極限值 (3.3.58) は (3.3.60) に書き直すことができる. (3.3.60) は3次元の速度ベクトル (3.2.66) の x_1 成分になる速度の変換の式である.

$$v_{x1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1+h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.51)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.3.47)$$

$$\gamma \cdot (v_x(t) - u) = v_{x1} \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right) \dots (3.3.58) \text{極限值}$$

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \neq 0 \dots (3.3.59) \text{仮定}$$

$$v_{x1}(t_1) = \frac{v_x(t) - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)} \dots (3.3.60)$$

$$\mathbf{v}_1(t_1) = v_{x1}\mathbf{i}_1 + v_{y1}\mathbf{j}_1 + v_{z1}\mathbf{k}_1 \dots (3.2.66)$$

(3.3.20) を使用して合成関数の微分法 (3.3.46) を導出した。同様に, (3.3.21) および (3.3.22) を使用して合成関数の微分法 (3.3.61) および合成関数の微分法 (3.3.62) を導出できる。合成関数の微分法 (3.3.61) および合成関数の微分法 (3.3.62) を使用して, 残りの速度の変換の式を導出する。

$$x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1) = v_{x1}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1 + h_1 \in \mathbf{R}_u \text{ のとき}) \dots (3.3.20)$$

$$y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1) = v_{y1}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1 + h_1 \in \mathbf{R}_u \text{ のとき}) \dots (3.3.21)$$

$$z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1) = v_{z1}(t_1) \cdot h_1 + o(h_1), (h_1 \rightarrow 0, t_1 + h_1 \in \mathbf{R}_u \text{ のとき}) \dots (3.3.22)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_1(t+h) - y_1(t)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (3.3.61)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_1(t+h) - z_1(t)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (3.3.62)$$

時点の隔たり (3.2.11) の時点およびローレンツ変換の (3.3.17) を使用して, (3.3.63) を記述できる。 (3.3.17) および (3.3.63) を使用して, 位置の隔たり (3.3.64) を記述できる。 (3.2.11) を使用すると, 位置の隔たり (3.3.64) は (3.3.65) に記述できる。

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \dots (3.2.11)$$

$$y_1(t) = y^p(t), (y_1(t) = y^p(t_1(t))) \dots (3.3.17)$$

$$y_1(t_p) = y^p(t_p) \dots (3.3.63)$$

$$y_1(t_p) - y_1(t) = y^p(t_p) - y^p(t) \dots (3.3.64) \text{位置の隔たり}$$

$$y_1(t+h) - y_1(t) = y^p(t+h) - y^p(t) \dots (3.3.65)$$

(3.3.53) を仮定して, 位置の隔たり (3.3.65) を使用すると平均変化率 (3.3.66) を記述できる。平均変化率 (3.3.66) の両辺の極限値を (3.3.67) に記述する。

$$h \neq 0 \dots (3.3.53)$$

$$\frac{y_1(t+h) - y_1(t)}{h} = \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \dots (3.3.66) \text{平均変化率}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_1(t+h) - y_1(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \dots (3.3.67) \text{極限值}$$

1次元で定義した速度 (3.2.14) を使用すると, 極限値 (3.3.67) は (3.3.68) になる。極限値 (3.3.68) の左辺は合成関数の微分法 (3.3.61) の左辺である。

$$v_y(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \dots (3.2.14)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_1(t+h) - y_1(t)}{h} = v_y(t) \dots (3.3.68) \text{極限值}$$

(3.3.47), (3.2.53) および (3.3.68) を合成関数の微分法 (3.3.61) に代入すると, 極限值 (3.3.69) になる. (3.3.59) を仮定すると, 極限值 (3.3.69) は (3.3.70) に書き直すことができる. (3.3.70) は3次元の速度ベクトル (3.2.66) の y_1 成分になる速度の変換の式である.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.3.47)$$

$$v_{y_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1^p(t_1+h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.53)$$

$$v_y(t) = v_{y_1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.3.69) \text{極限值}$$

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \neq 0 \dots (3.3.59) \text{仮定}$$

$$v_{y_1}(t_1) = \frac{v_y(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right)} \dots (3.3.70)$$

$$\mathbf{v}_1(t_1) = v_{x_1} \mathbf{i}_1 + v_{y_1} \mathbf{j}_1 + v_{z_1} \mathbf{k}_1 \dots (3.2.66)$$

時点の隔たり (3.2.11) の時点およびローレンツ変換の (3.3.18) を使用して, (3.3.71) を記述できる. (3.3.18) および (3.3.71) を使用して, 位置の隔たり (3.3.72) を記述できる. (3.2.11) を使用すると, 位置の隔たり (3.3.72) は (3.3.73) に記述できる.

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \dots (3.2.11)$$

$$z_1(t) = z^p(t), (z_1(t) = z_1^p(t_1(t))) \dots (3.3.18)$$

$$z_1(t_p) = z^p(t_p) \dots (3.3.71)$$

$$z_1(t_p) - z_1(t) = z^p(t_p) - z^p(t) \dots (3.3.72) \text{位置の隔たり}$$

$$z_1(t+h) - z_1(t) = z^p(t+h) - z^p(t) \dots (3.3.73)$$

(3.3.53) を仮定して, 位置の隔たり (3.3.73) を使用して平均変化率 (3.3.74) を記述できる. 平均変化率 (3.3.74) の両辺の極限値を (3.3.75) に記述する.

$$h \neq 0 \dots (3.3.53)$$

$$\frac{z_1(t+h) - z_1(t)}{h} = \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \dots (3.3.74) \text{平均変化率}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_1(t+h) - z_1(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \dots (3.3.75) \text{極限值}$$

1次元で定義した速度 (3.2.16) を使用すると, 極限值 (3.3.75) は (3.3.76) になる. 極限值 (3.3.76) の左辺は合成関数の微分法 (3.3.62) の左辺である.

$$v_z(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \dots (3.2.16)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_1(t+h) - z_1(t)}{h} = v_z(t) \dots (3.3.76) \text{極限值}$$

(3.3.47), (3.2.55) および (3.3.76) を合成関数の微分法 (3.3.62) に代入すると, 極限值 (3.3.77) になる. (3.3.59) を仮定すると, 極限值 (3.3.77) は (3.3.78) に書き直すことができる. (3.3.78) は 3 次元の速度ベクトル (3.2.66) の z_1 成分になる速度の変換の式である.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.3.47)$$

$$v_{z_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.55)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_1(t+h) - z_1(t)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (3.3.62)$$

$$v_z(t) = v_{z_1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.3.77) \text{ 極限值}$$

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \neq 0 \dots (3.3.59) \text{ 仮定}$$

$$v_{z_1}(t_1) = \frac{v_z(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right)} \dots (3.3.78)$$

$$\mathbf{v}_1(t_1) = v_{x_1} \mathbf{i}_1 + v_{y_1} \mathbf{j}_1 + v_{z_1} \mathbf{k}_1 \dots (3.2.66)$$

(3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) が速度の変換である. 次に, 上述の速度の変換を導出した方法とは別の方法で速度の変換である (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) を導出する. 上述の方法では合成関数の微分法を使用して速度の変換を導出した. 別の方法では, ローレンツ変換の (3.3.9) ~ (3.3.11) および (3.2.68) を使用して, 1次元の速度の定義から直接的に速度の変換を導出する.

$$x_1^p(t_1) = \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t) \dots (3.3.9)$$

$$y_1^p(t_1) = y^p(t) \dots (3.3.10)$$

$$z_1^p(t_1) = z^p(t) \dots (3.3.11)$$

$$t_1(t) = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x^p(t)}{c^2} \right) \dots (3.2.68)$$

ローレンツ変換の (3.3.16) ~ (3.3.18) で使用した合成関数—— (3.3.16) ~ (3.3.18) の右側の括弧の中に表示してある. ——で記述した位置の隔たりを使用して, 速度の変換を導出する. それらの合成関数を使用して, ローレンツ変換の (3.3.16) ~ (3.3.18) をローレンツ変換の (3.3.9) ~ (3.3.11) に対応を与えて, 速度の変換を導出する.

$$x_1(t) = \gamma \cdot (x^p(t) - u \cdot t), (x_1(t) = x_1^p(t_1(t))) \dots (3.3.16)$$

$$y_1(t) = y^p(t), (y_1(t) = y_1^p(t_1(t))) \dots (3.3.17)$$

$$z_1(t) = z^p(t), (z_1(t) = z_1^p(t_1(t))) \dots (3.3.18)$$

(3.2.11), (3.2.50), (3.3.27) および (3.3.28) を仮定する. ここでは, (3.2.11) および (3.2.50) の左辺は直接には使用しない.

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \dots (3.2.11)$$

$$\Delta t_1(h_1) \equiv t_{p_1} - t_1 = h_1 \dots (3.2.50)$$

$$t_{p_1} = t_1(t_p) \dots (3.3.27)$$

$$t_1 = t_1(t) \cdots (3.3.28)$$

(3.3.27) および (3.3.16) に表示した合成関数を使用して, (3.3.79) を記述する. (3.3.27) の右辺の独立変数および (3.3.16) に表示した合成関数を使用して, (3.3.80) を記述する.

$$x_1^p(t_{p1}) = x_1^p(t_1(t_p)) \cdots (3.3.79)$$

$$x_1(t_p) = x_1^p(t_1(t_p)) \cdots (3.3.80)$$

(3.3.79) および (3.3.80) から (3.3.81) になる. (3.3.16) を使用すると, (3.3.81) の左辺は (3.3.82) の左辺に記述できる.

$$x_1^p(t_{p1}) = x_1(t_p) \cdots (3.3.81)$$

$$x_1^p(t_{p1}) = \gamma \cdot (x^p(t_p) - u \cdot t_p) \cdots (3.3.82)$$

(3.3.9) および (3.3.82) を使用すると, 位置の隔たり (3.3.83) を記述できる. (3.2.11) および (3.2.50) を使用すると, 位置の隔たり (3.3.83) を (3.3.84) に記述できる.

$$x_1^p(t_{p1}) - x_1^p(t_1) = \gamma \cdot \{x^p(t_p) - x^p(t) - u \cdot (t_p - t)\} \cdots (3.3.83) \text{位置の隔たり}$$

$$x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1) = \gamma \cdot (x^p(t+h) - x^p(t) - u \cdot h) \cdots (3.3.84)$$

(3.3.53) を仮定すると, 位置の隔たり (3.3.84) は (3.3.85) に書き直すことができる. 慣性座標系 S_1 の位置の隔たりおよび慣性座標系 S の位置の隔たりを (3.3.85) で関係付けている.

$$h \neq 0 \cdots (3.3.53)$$

$$x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1) = \gamma \cdot \left(\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u \right) \cdot h, (h \neq 0) \cdots (3.3.85)$$

(3.2.11), (3.2.50), (3.3.27) および (3.3.28) を使用して, (3.3.29) を記述できる. (3.2.68) を使用して, (3.3.29) を (3.3.86) に記述できる. (3.3.86) は (3.3.87) に整理できる.

$$h_1 = t_{p1} - t_1 = t_1(t_p) - t_1(t) = t_1(t+h) - t_1(t) \cdots (3.3.29)$$

$$t_1(t) = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x^p(t)}{c^2} \right) \cdots (3.2.68)$$

$$h_1 = t_1(t+h) - t_1(t) = \gamma \cdot \left((t+h) - \frac{u \cdot x^p(t+h)}{c^2} \right) - \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x^p(t)}{c^2} \right) \cdots (3.3.86)$$

$$h_1 = \gamma \cdot \left\{ h - \frac{u \cdot (x^p(t+h) - x^p(t))}{c^2} \right\} \cdots (3.3.87)$$

(3.3.53) を仮定して, (3.3.87) を (3.3.88) に書き直すことができる. (3.3.88) では (3.3.88) の左辺は零にはならない. 2章2節で, (3.3.88) と類似の (2.2.53) を考察した. (2.2.53) では (3.3.16) に表示したような合成関数を使用して導出していない.

$$h \neq 0 \cdots (3.3.53)$$

$$h_1 = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u \cdot (x^p(t+h) - x^p(t))}{c^2} \right) \cdot h \neq 0, (h \neq 0) \cdots (3.3.88)$$

$$h_1 = \frac{1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{\Delta x_{f_{mn}}}{h}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \times h \neq 0, (h \neq 0) \dots (2.2.53)$$

位置の隔たり (3.3.85) を使用して, 平均変化率 (3.3.89) を記述できる. 平均変化率 (3.3.89) の右辺の分母に慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (3.3.88) を代入すると, (3.3.90) になる. ただし, 慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (3.3.88) では (3.3.91) を仮定している.

$$\frac{x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{\gamma \cdot \left(\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u \right) \cdot h}{h_1}, (h \neq 0, h_1 \neq 0) \dots (3.3.89) \text{ 平均変化率}$$

$$\frac{x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{\gamma \cdot \left(\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u \right) \cdot h}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \right) \cdot h}, (h \neq 0, h_1 \neq 0) \dots (3.3.90)$$

$$1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \neq 0 \dots (3.3.91) \text{ 仮定}$$

平均変化率 (3.3.90) は (3.3.92) に記述できる. (3.3.91) を仮定して, 平均変化率 (3.3.92) の極限値を (3.3.93) に記述できる. 極限値 (3.3.93) の右辺は (3.3.94) の右辺のように記述できる.

$$\frac{x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u}{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - c^2}, (h \neq 0, h_1 \neq 0) \dots (3.3.92)$$

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } h_1 \rightarrow 0 \dots (3.3.93)$$

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u}{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - c^2} \dots (3.3.93)$$

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - u}{u \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} - c^2} \dots (3.3.94)$$

(3.2.12) および (3.2.51) を使用すると, 極限値 (3.3.94) は (3.3.60) になる. ただし, (3.3.60) には (3.3.59) を仮定する.

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

$$v_{x1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.51)$$

$$v_{x1}(t_1) = \frac{v_x(t) - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)} \dots (3.3.60)$$

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \neq 0 \dots (3.3.59) \text{ 仮定}$$

(3.3.27) および (3.3.17) に表示した合成関数を使用して, (3.3.95) を記述する. (3.3.27) の右辺の独立変数および (3.3.17) に表示した合成関数を使用して, (3.3.96) を記述する.

$$t_{p1} = t_1(t_p) \dots (3.3.27)$$

$$y_1(t) = y^p(t), (y_1(t) = y_1^p(t_1(t))) \dots (3.3.17)$$

$$y_1^p(t_{p1}) = y_1^p(t_1(t_p)) \dots (3.3.95)$$

$$y_1(t_p) = y_1^p(t_1(t_p)) \dots (3.3.96)$$

(3.3.95) および (3.3.96) から (3.3.97) になる. (3.3.17) を使用すると, (3.3.97) の左辺は (3.3.98) の左辺に記述できる.

$$y_1^p(t_{p1}) = y_1(t_p) \dots (3.3.97)$$

$$y_1^p(t_{p1}) = y^p(t_p) \dots (3.3.98)$$

(3.3.10) および (3.3.98) を使用すると, 位置の隔たり (3.3.99) を記述できる. (3.2.11) および (3.2.50) を使用すると, 位置の隔たり (3.3.99) を (3.3.100) に記述できる.

$$y_1^p(t_1) = y^p(t) \dots (3.3.10)$$

$$y_1^p(t_{p1}) - y_1^p(t_1) = y^p(t_p) - y^p(t) \dots (3.3.99) \text{ 位置の隔たり}$$

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \dots (3.2.11)$$

$$\Delta t_1(h_1) \equiv t_{p1} - t_1 = h_1 \dots (3.2.50)$$

$$y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1) = y^p(t + h) - y^p(t) \dots (3.3.100)$$

(3.3.100) を使用して, 平均変化率 (3.3.101) を記述できる. 平均変化率 (3.3.101) の右辺の分母に慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (3.3.88) を代入すると, 平均変化率 (3.3.102) になる. ただし, 慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (3.3.88) では (3.3.91) を仮定している.

$$\frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{y^p(t + h) - y^p(t)}{h}, (h_1 \neq 0) \dots (3.3.101) \text{ 平均変化率}$$

$$h_1 = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t + h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \right) \cdot h \neq 0, (h \neq 0) \dots (3.3.88)$$

$$\frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{\frac{y^p(t + h) - y^p(t)}{h} \cdot h}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t + h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \right) \cdot h} \dots (3.3.102)$$

$$1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \neq 0 \dots (3.3.91) \text{ 仮定}$$

平均変化率 (3.3.102) は (3.3.103) に記述できる. (3.3.33) を仮定して, 平均変化率 (3.3.103) の極限值を (3.3.104) に記述できる.

$$\frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{\frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h}}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \right)} \dots (3.3.103)$$

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } h_1 \rightarrow 0 \dots (3.3.33)$$

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{1}{\gamma} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h}}{1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2}} \dots (3.3.104)$$

(3.2.12), (3.2.14) および (3.2.53) を使用すると, 極限值 (3.3.104) は (3.3.70) になる. ただし, (3.3.70) には (3.3.59) を仮定する.

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

$$v_y(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \dots (3.2.14)$$

$$v_{y_1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.53)$$

$$v_{y_1}(t_1) = \frac{v_y(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right)} \dots (3.3.70)$$

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \neq 0 \dots (3.3.59) \text{ 仮定}$$

(3.3.27) および (3.3.18) に表示した合成関数を使用して, (3.3.105) を記述する. (3.3.27) の右辺の独立変数および (3.3.18) に表示した合成関数を使用して, (3.3.106) を記述する.

$$t_{p1} = t_1(t_p) \dots (3.3.27)$$

$$z_1(t) = z^p(t), (z_1(t) = z_1^p(t_1(t))) \dots (3.3.18)$$

$$z_1^p(t_{p1}) = z_1^p(t_1(t_p)) \dots (3.3.105)$$

$$z_1(t_p) = z_1^p(t_1(t_p)) \dots (3.3.106)$$

(3.3.105) および (3.3.106) から (3.3.107) になる. (3.3.18) を使用すると, (3.3.107) の左辺は (3.3.108) の左辺に記述できる.

$$z_1^p(t_{p1}) = z_1(t_p) \dots (3.3.107)$$

$$z_1^p(t_{p1}) = z^p(t_p) \dots (3.3.108)$$

(3.3.11) および (3.3.108) を使用すると、位置の隔たり (3.3.109) を記述できる。(3.2.11) および (3.2.50) を使用すると、位置の隔たり (3.3.109) を (3.3.110) に記述できる。

$$z_1^p(t_1) = z^p(t) \cdots (3.3.11)$$

$$z_1^p(t_{p1}) - z_1^p(t_1) = z^p(t_p) - z^p(t) \cdots (3.3.109) \text{位置の隔たり}$$

$$\Delta t(h) = t_p - t = h \cdots (3.2.11)$$

$$\Delta t_1(h_1) \equiv t_{p1} - t_1 = h_1 \cdots (3.2.50)$$

$$z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1) = z^p(t + h) - z^p(t) \cdots (3.3.110)$$

位置の隔たり (3.3.110) を使用して、平均変化率 (3.3.111) を記述できる。平均変化率 (3.3.111) の右辺の分母に慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (3.3.88) を代入すると、(3.3.112) になる。ただし、慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (3.3.88) では (3.3.91) を仮定している。

$$\frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{z^p(t + h) - z^p(t)}{h}, (h_1 \neq 0) \cdots (3.3.111) \text{平均変化率}$$

$$h_1 = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \right) \cdot h \neq 0, (h \neq 0) \cdots (3.3.88)$$

$$\frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{\frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \cdot h}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \right) \cdot h} \cdots (3.3.112)$$

$$1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \neq 0 \cdots (3.3.91) \text{仮定}$$

平均変化率 (3.3.112) は (3.3.113) に記述できる。(3.3.33) を仮定して、平均変化率 (3.3.113) の極限値を (3.3.114) に記述できる。

$$\frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{\frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h}}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2} \right)} \cdots (3.3.113)$$

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } h_1 \rightarrow 0 \cdots (3.3.33)$$

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} = \frac{1}{\gamma} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h}}{1 - \frac{u \cdot \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h}}{c^2}} \cdots (3.3.114)$$

(3.2.12), (3.2.16) および (3.2.55) を使用すると、極限値 (3.3.114) は (3.3.78) になる。ただし、(3.3.78) には (3.3.59) を仮定する。

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

$$v_z(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \dots (3.2.16)$$

$$v_{z1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1+h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.55)$$

$$v_{z1}(t_1) = \frac{v_z(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.78)$$

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \neq 0 \dots (3.3.59) \text{ 仮定}$$

係数 (2.22) および真空中の光の速さ (2.11) を使用して、速度の変換について考察する。ここまでで、速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) を二つの方法で導出した。この二つの方法では、(3.3.33) を仮定して導出した。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \dots (2.22)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \varepsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \dots (2.11)$$

$$v_{x1}(t_1) = \frac{v_x(t) - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)} \dots (3.3.60)$$

$$v_{y1}(t_1) = \frac{v_y(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.70)$$

$$v_{z1}(t_1) = \frac{v_z(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.78)$$

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } h_1 \rightarrow 0 \dots (3.3.33)$$

また、速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) には係数 (2.22) を記述している。係数 (2.22) から生じる次の仮定があった。係数 (2.22) の記述から、係数 (2.22) の定義区間内では (2.23) を満足する。一般には、(2.22) の定義区間は (2.24) であることは既に2章2節で説明した。そして、(2.22) は区間 (2.25) 内の値となる。

$$u \neq c \dots (2.23)$$

$$-c < u < c \dots (2.24)$$

$$1 \leq \gamma < \infty \dots (2.25)$$

速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) では (3.3.59) を仮定している。(3.3.59) から (3.3.115) が導出できる。速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) では、(3.3.115) が成立する慣性座標系 S_1 の速度 (2.6) の成分

および1次元の速度 (3.2.12) を仮定する.

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \neq 0 \dots (3.3.59) \text{ 仮定}$$

$$u \cdot v_x(t) \neq c^2 \dots (3.3.115)$$

$\mathbf{u}_{S_1-S} = u\mathbf{i}$, ($u = \text{const.}$) \dots (2.6) 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S_1 の等速度

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

もし、真空中の光の速さ (2.11) が (3.3.116) を満足するならば、係数 (2.22) は (3.3.117) に記述できる. ここで、(3.3.117) を満足する場合についての速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) を考察する. ただし、(3.3.117) の \mathbf{R} は実数の集合を意味する.

$$c \rightarrow \infty \dots (3.3.116)$$

$$\gamma \rightarrow 1, (c \rightarrow \infty, c \in \mathbf{R} \text{ のとき}) \dots (3.3.117)$$

(3.3.117) の場合で (3.3.118) を仮定する. (3.3.118) では係数 (2.22) が近似値として1になる場合である.

$$\gamma \doteq 1 (= \text{const.}) \dots (3.3.118)$$

(3.3.117) の場合の (3.3.118) で、数学の変換として扱うローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) を近似の計算で考察する. 近似の計算で (2.18) の右辺は (3.3.119) に記述できる. 同様に、近似の計算で (2.19) の右辺は (3.3.120) に記述できる. また、近似の計算で (2.20) の右辺は (3.3.121) に記述できる. (3.3.117) および (3.3.118) を仮定しているので、近似の計算で (2.21) の右辺は (3.3.122) に記述できる.

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \dots (2.18)$$

$$y_1 = y \dots (2.19)$$

$$z_1 = z \dots (2.20)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \dots (2.21)$$

$$x - u \cdot t \dots (3.3.119)$$

$$y \dots (3.3.120)$$

$$z \dots (3.3.121)$$

$$t \dots (3.3.122)$$

(3.3.117) の場合の (3.3.118) では、近似の計算で速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) は次のようになる. 近似の計算で (3.3.60) の右辺は (3.3.123) に記述できる. 同様に、近似の計算で (3.3.70) の右辺は (3.3.124) に記述できる. また、近似の計算で (3.3.78) の右辺は (3.3.125) に記述できる.

$$v_x - u \dots (3.3.123)$$

$$v_y \dots (3.3.124)$$

$$v_z \dots (3.3.125)$$

3.4 特殊相対性理論の速度の変換での運動

速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) では係数 (2.22) を使用している. 係数 (2.22) の右辺では (2.6) の成分を使用している. 係数 (2.22) から (2.24) になることで, (2.6) の成分は真空中の光の速さ (2.12) 以上になることはできない.

$$v_{x_1}(t_1) = \frac{v_x(t) - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)} \dots (3.3.60)$$

$$v_{y_1}(t_1) = \frac{v_y(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.70)$$

$$v_{z_1}(t_1) = \frac{v_z(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.78)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \dots (2.22)$$

$$\mathbf{u}_{S_1-S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \dots (2.6) \text{ 慣性座標系 } S \text{ の } x \text{ 成分および } t \text{ 成分で記述した慣性座標系 } S_1 \text{ の等速度}$$

$$-c < u < c \dots (2.24)$$

$$c = 299\,792\,458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \dots (2.12)$$

速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) を導出する際には (3.3.33) も仮定している. もし、一般に、3次元の速度の x 成分 (3.2.12) が (3.4.1) になるならば, 時点の微分係数 (3.2.73) は発散する. 時点の微分係数 (3.2.73) が発散する場合は, (3.3.33) は保証されない. また, ここでの速度の変換では (2.6) の成分および3次元の速度の x 成分 (3.2.12) は (3.3.115) を満足することを仮定している. (3.4.1) のように速度の x 成分が無限大に近づく過程で, (3.3.115) を満足しないことも考えられる. 速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) では (2.24) \cdot (3.3.115) を満足する慣性座標系 S_1 の等速度 (2.6) の成分および3次元の速度の x 成分 (3.2.12) を使用することになる.

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } h_1 \rightarrow 0 \dots (3.3.33)$$

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

$$v_x(t) \rightarrow \infty \dots (3.4.1)$$

$$t'_1(t) = \gamma - \gamma \cdot \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right) \dots (3.2.73)$$

$$u \cdot v_x(t) \neq c^2 \dots (3.3.115)$$

(3.4.2) はアインシュタインの特殊相対性理論での相対論的質量と呼ばれるものである. 相対論的質量 (3.4.2) の分子は静止質量と呼ばれるものである. (3.4.2) の分子の静止質量は質点の速さが零のときのその質点の質量である. また, 質点の速さは (3.4.2) の分母に記述されている (3.4.3) である. ここでは, (3.4.3) のように質点の速さは実数の

値で扱う。このために、慣性座標系内に存在する質点の速さ (3.4.3) は (3.4.4) の区間の値になるものとする。そして、アインシュタインの特殊相対性理論での質点の速さは真空中の光の速さ (2.11) 以上にはならないものと扱われる。

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \text{ kg} \dots (3.4.2)$$

$$v_1 = |\mathbf{v}_1| \in \mathbf{R}, (v_1 \geq 0) \dots (3.4.3)$$

$$0 \leq v_1 < c \dots (3.4.4)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \times \epsilon_0}}, (c \neq 0, c > 0) \dots (2.11)$$

一般的には、相対論的質量 (3.4.2) は、独立変数となる速さについての関数 (3.4.5) として扱える。慣性座標系内の質点の速度は速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) で記述したように各慣性座標系に対応した速度に変換される。

$$m_1(v_1) \dots (3.4.5)$$

例えば、慣性座標系 S で質点の速度が (3.4.6) で記述できることを仮定する。慣性座標系 S での速度 (3.4.6) は慣性座標系 S₁ では速度 (3.4.7) に変換される。慣性座標系 S₁ での速度 (3.4.7) では、その質点は慣性座標系 S₁ 内に静止している。速度が (3.4.6) で記述できる質点の慣性座標系 S での相対論的質量は (3.4.8) になる。一方、速度が (3.4.7) で記述できる質点の慣性座標系 S₁ での相対論的質量は (3.4.9) になる。相対論的質量 (3.4.9) は静止質量である。ただし、(3.4.6) の右辺には慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S₁ の等速度 (2.6) の成分を記述している。

$$(v_x, v_y, v_z) = (u, 0, 0) \dots (3.4.6)$$

$$(v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}) = (0, 0, 0) \dots (3.4.7)$$

$$m_1(u) \dots (3.4.8) \text{ 慣性座標系 S での相対論的質量}$$

$$m_1(0) = m_0 \dots (3.4.9) \text{ 慣性座標系 S}_1 \text{ での相対論的質量}$$

$$\mathbf{u}_{S1-S} = u\mathbf{i}, (u = \text{const.}) \dots (2.6) \text{ 慣性座標系 S の x 成分および t 成分で記述した慣性座標系 S}_1 \text{ の等速度}$$

ニュートンの三つの運動の法則ではガリレイ変換と呼ばれる (3.4.10) ~ (3.4.13) が使用される。ガリレイ変換 (3.4.10) ~ (3.4.13) の右辺の記述は (3.3.119) ~ (3.3.122) の記述に等しい。ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) の近似の計算から (3.3.119) ~ (3.3.122) が導出できることは既に説明した。

$$x_1 = x - u \cdot t \dots (3.4.10)$$

$$y_1 = y \dots (3.4.11)$$

$$z_1 = z \dots (3.4.12)$$

$$t_1 = t \dots (3.4.13)$$

ガリレイ変換 (3.4.10) ~ (3.4.13) を使用すると、ガリレイ変換の速度の変換 (3.4.14) ~ (3.4.16) を導出できる。

(3.4.10) ~ (3.4.16) からでは (3.4.17) を満足することは理論計算では可能である。このことは、アインシュタインの特殊相対性理論では質点の速度に条件があることに対して (3.4.17) を満足できることはガリレイ変換の特徴となる箇所である。さらに、慣性座標系の等速度の大きさを無限大までも扱うことができることはガリレイ変換の特徴となる箇所である。

$$v_{x1} = v_x - u \cdots (3.4.14)$$

$$v_{y1} = v_y \cdots (3.4.15)$$

$$v_{z1} = v_z \cdots (3.4.16)$$

$$v_{x1} \rightarrow \infty, (v_x \rightarrow \infty, v_x \in \mathbf{R} \text{ のとき}) \cdots (3.4.17)$$

慣性座標系 S での質点のもつ3次元の速度の x 成分 (3.4.13) を仮定する. 3次元の速度の x 成分 (3.4.13) の値は真空中の光の速さの値である. (3.4.13) を (3.3.60) に代入すると, (3.4.14) を記述できる. 慣性座標系 S_1 での質点のもつ3次元の速度の x_1 成分 (3.4.14) の右辺は真空中の光の速さである.

$$v_x(t) = c \cdots (3.4.13)$$

$$v_{x1}(t_1) = \frac{v_x(t) - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)} \cdots (3.3.60)$$

$$v_{x1} = \frac{c - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot c} = \frac{c - u}{\frac{c - u}{c}} = c \cdots (3.4.14)$$

x 成分 (3.4.13) をもつ3次元の速度の y 成分には (3.4.15) を仮定する. (3.4.15) を (3.3.70) に代入すると, (3.4.16) を記述できる. 慣性座標系 S_1 での質点のもつ3次元の速度の y_1 成分 (3.4.16) の右辺の値は零である.

$$v_y(t) = 0 \cdots (3.4.15)$$

$$v_{y1}(t_1) = \frac{v_y(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \cdots (3.3.70)$$

$$v_{y1}(t_1) = \frac{0}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot c\right)} = 0 \cdots (3.4.16)$$

x 成分 (3.4.13) をもつ3次元の速度の z 成分には (3.4.17) を仮定する. (3.4.17) を (3.3.78) に代入すると, (3.4.18) を記述できる. 慣性座標系 S_1 での質点のもつ3次元の速度の z_1 成分 (3.4.18) の右辺の値は零である.

$$v_z(t) = 0 \cdots (3.4.17)$$

$$v_{z1}(t_1) = \frac{v_z(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \cdots (3.3.78)$$

$$v_{z1}(t_1) = \frac{0}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot c\right)} = 0 \cdots (3.4.18)$$

(3.4.13), (3.4.15) および (3.4.17) を使用すると, 慣性座標系 S での質点のもつ3次元の速度の速さは (3.4.19) で真空中の光の速さになる. 同様に, (3.4.14), (3.4.16) および (3.4.18) を使用すると, 慣性座標系 S_1 での質点のもつ3次元の速度の速さは (3.4.20) で真空中の光の速さになる.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = c \dots (3.4.19)$$

$$v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2 + v_{z1}^2} = c \dots (3.4.20)$$

このような真空中の光の速さをもった質点を光子と呼ばれる光の粒子として扱うことがある。(3.4.13) ~ (3.4.20) までの計算では、慣性座標系 S および慣性座標系 S₁ 内で質点が真空中の光の速さを持つことができる。ただし、相対論的質量 (3.4.2) では、質点の速さは区間 (3.4.4) 内の実数である。このような相対論的質量 (3.4.2) での解釈では、(3.4.13) ~ (3.4.20) までの計算は成立しない仮定での議論である。文献 16 では相対論的質量について説明を与えた。

$$0 \leq v_1 < c \dots (3.4.4)$$

(3.4.13) ~ (3.4.20) までの計算では質点として計算をした。もし、光子を光として扱うならば、(3.4.19) および (3.4.20) ではアインシュタインの慣性座標系で光速の不変の原理を満足しているものと解釈できる観点がある。

光速の不変の原理：すべての慣性座標系で、真空中の光の速さは同じ値である。

(3.3.70) および (3.3.78) は合成関数の微分法 (3.3.61) および合成関数の微分法 (3.3.62) を使用して導出したものである。時点の微分係数 (3.3.47) は合成関数の微分法 (3.3.61) および合成関数の微分法 (3.3.62) の右辺で使った。

$$v_{y1}(t_1) = \frac{v_y(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.70)$$

$$v_{z1}(t_1) = \frac{v_z(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.78)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_1(t+h) - y_1(t)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (3.3.61)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_1(t+h) - z_1(t)}{h} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \dots (3.3.62)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right) \dots (3.3.47)$$

(3.3.61) の左辺には (3.3.68) を代入した。(3.3.68) の右辺は、慣性座標系 S での質点のもつ 3次元の速度ベクトルの y 成分である。慣性座標系 S₁ での質点のもつ 3次元の速度ベクトルの y₁ 成分 (3.3.70) が (3.3.68) に等しくないのは時点の微分係数 (3.3.47) の記述から生じている。(3.3.68) および時点の微分係数 (3.3.47) を使用して、合成関数の微分法 (3.3.61) を (3.3.69) に記述した。もし、時点の微分係数 (3.3.47) が 1 であるならば、慣性座標系 S₁ での 3次元の速度の y₁ 成分 (3.3.70) が慣性座標系 S での 3次元の速度の y 成分 (3.3.68) に等しくなる。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_1(t+h) - y_1(t)}{h} = v_y(t) \dots (3.3.68)$$

$$v_y(t) = v_{y1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right) \dots (3.3.69)$$

同様に次の議論ができる。(3.3.62)の左辺には(3.3.76)を代入した。(3.3.76)の右辺は、慣性座標系 S での質点のもつ3次元の速度ベクトルの z 成分である。慣性座標系 S_1 での質点のもつ3次元の速度ベクトルの z_1 成分(3.3.78)が(3.3.76)に等しくないのは時点の微分係数(3.3.47)の記述から生じている。(3.3.76)および時点の微分係数(3.3.47)を使用して、合成関数の微分法(3.3.62)を(3.3.77)に記述した。もし、時点の微分係数(3.3.47)が1であるならば、慣性座標系 S_1 での3次元の速度の z_1 成分(3.3.70)が慣性座標系 S での3次元の速度の z 成分(3.3.76)に等しくなる。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_1(t+h) - z_1(t)}{h} = v_z(t) \dots (3.3.76)$$

$$v_z(t) = v_{z_1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) \dots (3.3.77)$$

慣性座標系 S での3次元の速度ベクトルの x 成分(3.2.12)は慣性座標系 S_1 での質点のもつ3次元の速度ベクトルの x_1 成分、 y_1 成分および z_1 成分に記述されている。速度の変換(3.3.60)、(3.3.70)および(3.3.78)では時点の微分係数(3.3.47)の記述に3次元の速度の x 成分(3.2.12)が記述されている。

4 あとがき

著者は、電磁気学および量子力学に関連のある分野としてアインシュタインの特殊相対性理論を学んだ。電磁気学および量子力学を学ぶために使用する特殊相対性理論の速度の変換について知ることができるよう本書の設計を試みた。また、著者の専攻になる循環系の回路モデルに関連のある物理および数学の知識を使用することも本書の設計では試みた。

マクスウェルの方程式系から導出できる電場および磁束密度の波動方程式の記述で真空中の光の速さが定数になることが考えられた。真空中の光の速さを使用して、アインシュタインの特殊相対性理論から質量がエネルギーに相当することを導出できた。量子論ではエネルギーの量子化が電磁波のエネルギーの或る実験の結果を説明できるものと扱われた。これらの‘真空中の光の速さ’、‘質量とエネルギーの関係’および‘エネルギーの量子化’は量子力学を構築するのに使用された。2008年現在までの電子工学分野で使用される技術が電磁気学、アインシュタインの特殊相対性理論および量子力学から得た知識を使って研究・開発されたこと、は既知とされている。上述のエネルギーの量子化については、文献13に説明を与えた。

著者の研究では、循環系の回路モデル理論の整合性を確認するために、電磁気学、アインシュタインの特殊相対性理論および量子力学から得た知識を使っている。著者の構築した循環系の回路モデル理論から導出した方程式系で、ヒトの左心室の内圧および血液量の測定値と完全に一致したことは文献8でも発表している。

本書の内容は、アインシュタインの特殊相対性理論として扱われる2008年現在の日本の大学の一般的な講義内容としては、その一部に対応する。しかし、本書の説明は大学の工学科で行われる講義内容よりも詳細な説明になっている場合も経験から著者は考える。

著者の2009年7月現在の予定では、アインシュタインの特殊相対性理論の加速度の変換および力の変換の無償のファイルを発行する。ただし、これらのファイルおよび本書のファイルの内容を合わせても大学課程の特殊相対性理論の内容としては十分なものとは著者は判断していない。

数学（ベクトルおよび微分法）と逆変換について

本文では説明しなかった数学および特殊相対性理論の逆変換についてを付録で説明する。数学では、無限小および反対ベクトル——逆ベクトルとも呼ぶ。——について説明する。特殊相対性理論の逆変換については、ローレンツ変換および速度の変換の逆変換について説明する。

付録

i. ローレンツ変換の逆変換

ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) は慣性座標系 S_1 の位置—— (2.18) ~ (2.20) の左辺のこと。——および時点—— (2.21) の左辺のこと。——を左辺に記述している。付録 i ではローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) を慣性座標系 S の位置—— x, y および z のこと。——および時点—— t のこと。——について解くことにする。ここで解いた解はローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) の逆変換になる。

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \dots (2.18)$$

$$y_1 = y \dots (2.19)$$

$$z_1 = z \dots (2.20)$$

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \dots (2.21)$$

ローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) では (2.22) を使用している。係数 (2.22) では (2.23) ~ (2.25) が成立することを 2 章で既に説明した。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \dots (2.22)$$

$$u \neq c \dots (2.23)$$

$$-c < u < c \dots (2.24)$$

$$1 \leq \gamma < \infty \dots (2.25)$$

(2.18) を (a.1.1) に書き直す。(a.1.1) から (a.1.2) を導出する。

$$\frac{x_1}{\gamma} = x - u \cdot t \dots (a.1.1)$$

$$x = \frac{x_1}{\gamma} + u \cdot t \dots (a.1.2)$$

(2.21) を (a.1.3) に書き直す。(a.1.3) から (a.1.4) を導出する。

$$\frac{t_1}{\gamma} = t - \frac{u \cdot x}{c^2} \dots (a.1.3)$$

$$t = \frac{t_1}{\gamma} + \frac{u \cdot x}{c^2} \dots (a.1.4)$$

時点 (a.1.4) を (a.1.2) の右辺に代入すると (a.1.5) になる。(a.1.5) の右辺は (a.1.6) の右辺に記述できる。

$$x = \frac{x_1}{\gamma} + u \cdot \left(\frac{t_1}{\gamma} + \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \dots (a.1.5)$$

$$x = \frac{x_1}{\gamma} + u \cdot \frac{t_1}{\gamma} + u \cdot \frac{u \cdot x}{c^2} \dots (a.1.6)$$

(a.1.6) を x について整理すると, (a.1.7) になる. (a.1.7) を (a.1.8) に書き直す. (a.1.8) では (a.1.9) を仮定する. 仮定 (a.1.9) は (2.22) で成立している.

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)x = \frac{x_1}{\gamma} + u \cdot \frac{t_1}{\gamma} \dots (\text{a.1.7})$$

$$x = \frac{1}{\gamma} \frac{x_1 + u \cdot t_1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \dots (\text{a.1.8})$$

$$1 - \frac{u^2}{c^2} \neq 0 \dots (\text{a.1.9}) \text{ 仮定}$$

(a.1.8) をまとめると, (a.1.10) になる. (a.1.10) は逆変換の x 成分の式である.

$$x = \gamma \cdot (x_1 + u \cdot t_1) \dots (\text{a.1.10}) \text{ 逆変換の式}$$

(a.1.4) の右辺に (a.1.10) を代入すると, (a.1.11) になる. (a.1.11) は (a.1.12) に記述できる.

$$t = \frac{t_1}{\gamma} + \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot (x_1 + u \cdot t_1) \dots (\text{a.1.11})$$

$$t = \frac{t_1}{\gamma} + \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot x_1 + \gamma \cdot \frac{u^2}{c^2} \cdot t_1 \dots (\text{a.1.12})$$

(a.1.12) の右辺を (a.1.13) のように整理する. (a.1.13) の右辺では (a.1.14) が成立している.

$$t = \gamma \cdot \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{u^2}{c^2} \right) \cdot t_1 + \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot x_1 \dots (\text{a.1.13})$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{u^2}{c^2} (\neq 0) \dots (\text{a.1.14})$$

(a.1.14) を (a.1.13) の右辺に代入すると, (a.1.15) になる. (a.1.15) を整理すると (a.1.16) になる.

$$t = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} \right) \cdot t_1 + \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot x_1 \dots (\text{a.1.15})$$

$$t = \gamma \cdot t_1 + \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot x_1 \dots (\text{a.1.16})$$

(a.1.16) は (a.1.17) にまとめることができる. (a.1.17) は逆変換の t 成分の式である.

$$t = \gamma \cdot \left(t_1 + \frac{u}{c^2} \cdot x_1 \right) \dots (\text{a.1.17}) \text{ 逆変換の式}$$

(2.19) を (a.1.18) に書き換える. (a.1.18) は逆変換の y 成分の式である.

$$y_1 = y \dots (2.19)$$

$$y = y_1 \dots (\text{a.1.18}) \text{ 逆変換の式}$$

(2.20) を (a.1.19) に書き換える. (a.1.19) は逆変換の z 成分の式である.

$$z_1 = z \dots (2.20)$$

$$z = z_1 \dots (\text{a.1.19}) \text{ 逆変換の式}$$

付録 i で導出した (a.1.10), (a.1.18), (a.1.19) および (a.1.17) はローレンツ変換 (2.18) ~ (2.21) の逆変換である.

$$x = \gamma \cdot (x_1 + u \cdot t_1) \dots (\text{a.1.10})$$

$$y = y_1 \cdots \text{(a.1.18)}$$

$$z = z_1 \cdots \text{(a.1.19)}$$

$$t = \gamma \cdot \left(t_1 + \frac{u}{c^2} \cdot x_1 \right) \cdots \text{(a.1.17)}$$

ii. 無限小について

本書では、慣性座標系 S_1 の時点の微分係数 (2.28) は、等価な表し方として (3.3.19) に書き直した。(3.3.19) の右辺には‘無限小’を導入した記述である。付録 ii で、本書で使用する無限小について説明する。

$$t_1'(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_1(t+h) - t_1(t)}{h} \cdots \text{(2.28)}$$

$$t_1(t+h) - t_1(t) = t_1'(t) \cdot h + o(h), (h \rightarrow 0, t+h \in \mathbf{R}_t \text{ のとき}) \cdots \text{(3.3.19)}$$

関数の関係である (a.2.1) が (a.2.2) で保証される場合を考察する。(a.2.3), (a.2.4) および (a.2.5) はそれぞれ異なる定義区間をもつことも考えられる。そこで、これらの定義区間内に在る共通な区間内で次の仮定をする。(a.2.2) が仮定できる零を含まない零の近傍の実数値となる区間内では関係式 (a.2.1) を満足することを仮定する。

$$f(t) = g(t) \cdot h(t) \cdots \text{(a.2.1)}$$

$$t \rightarrow 0 \text{ のとき} \cdots \text{(a.2.2)}$$

$$f(t) \cdots \text{(a.2.3)}$$

$$g(t) \cdots \text{(a.2.4)}$$

$$h(t) \cdots \text{(a.2.5)}$$

(a.2.1) を使用して、(a.2.6) のように記述することがある。(a.2.6) の右辺では、極限值 (a.2.7) が成立することを意味する。速度の変換を導出する際には、極限值 (a.2.7) では (a.2.8) を満足した。

$$f(t) = o(h), (t \rightarrow 0 \text{ のとき}) \cdots \text{(a.2.6)}$$

$$\frac{o(h)}{h(t)} = \frac{g(t) \cdot h(t)}{h(t)} = g(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow 0 \text{ のとき}) \cdots \text{(a.2.7)}$$

$$g(0) = 0 \cdots \text{(a.2.8)}$$

(a.2.9) を記述する場合では、関係 (a.2.1) が保証されていて (a.2.10) を‘無限小’であるという。本書では、(a.2.9) のように記述することを基本とする。そこで、これらの定義区間内に在る共通な区間内で次のようにした。誤解が生じないものと考えた場合には (a.2.9) の括弧内の (a.2.2) を表示しないこともある。

$$o(h), (t \rightarrow 0 \text{ のとき}) \cdots \text{(a.2.9)}$$

$$g(t) \cdots \text{(a.2.10) 無限小である。}$$

例えば次の計算ができる。関数 (a.2.11), (a.2.12) および (a.2.13) を仮定する。(a.2.11) ~ (a.2.13) はそれぞれ異なる定義区間を持つかもしれない。しかし、(a.2.2) のときに関係 (a.2.1) が成立するものとする。この場合では、(a.2.14) に記述できる。(a.2.14) の意味から、極限值 (a.2.15) が成立する。(a.2.15) から関数 (a.2.11) は無限小である。

$$g(t) = t \cdots \text{(a.2.11)}$$

$$h(t) = t \cdots \text{(a.2.12)}$$

$$f(t) = t \times t \cdots \text{(a.2.13)}$$

$$f(t) = o(t), (t \rightarrow 0 \text{ のとき}) \cdots \text{(a.2.14)}$$

$$\frac{o(h)}{h(t)} = \frac{t \times t}{t} = g(t) = t \rightarrow 0, (t \rightarrow 0 \text{ のとき}) \dots (a.2.15)$$

(a.2.2) で t がどこまでも零に近づく場合には t を無限小と呼ぶこともある。また、極限值 (a.2.16) が成立する場合でも極限值 (a.2.16) の (a.2.17) を無限小と呼ぶことがある。

$$t \rightarrow 0 \text{ のとき} \dots (a.2.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = 0 \dots (a.2.16)$$

$$\beta(t) \dots (a.2.17)$$

iii. 長さの収縮

3章1節では質点を使用して慣性座標系 S に静止させた棒の長さの収縮について説明した。付録iiiでも、慣性座標系 S に棒を静止させているものとする。質点を使用しないで、この棒の長さを慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 で計算する。この場合でも、慣性座標系 S および慣性座標系 S_1 の位置および時点の情報を使用する。そして、2章1節の出来事 A を使用して、棒の長さを計算する。

ここでは、2章1節の出来事 A は、慣性座標系 S_1 では同時に棒の両端の位置でそれぞれの位置の x_1 成分を測定すること、とする。この出来事 A は、慣性座標系 S では時点の隔たりを経て棒の両端の位置で、その棒の両端の x 成分をそれぞれ測定することになる。

付録iiiでは2章1節の計算を使用するために、2章1節と同じ記号を使用する箇所がある。隔たりは (2.1.7) ~ (2.1.9) を使用する。2章1節で定義しなかった慣性座標系 S_1 の位置の隔たりは (a.3.1) で定義する。(2.1.7) は慣性座標系 S に静止している棒の両端の長さとする。

$$\Delta x_{mn} \equiv x_m - x_n \dots (2.1.7)$$

$$\Delta t_{mn} \equiv t_m - t_n \dots (2.1.8)$$

$$\Delta t_{1mn} \equiv t_{1m} - t_{1n} \dots (2.1.9)$$

$$\Delta x_{1mn} \equiv x_{1m} - x_{1n} \dots (a.3.1)$$

慣性座標系 S_1 で、出来事 A が同時に生じるので (2.1.11) が成立する。(2.1.11) から (2.1.22) を記述できる。

$$\Delta t_{1mn} = 0 \dots (2.1.11)$$

$$t_{1m} = t_{1n} = t_{1c} \dots (2.1.22) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ で棒の長さを測定する時点.}$$

慣性座標系 S に静止している棒の両端の長さを (2.1.13) とする。(2.1.7) を使用すると、(2.1.13) から (2.1.15) を記述できる。

$$\Delta x_{mn} \neq 0 \dots (2.1.13)$$

$$x_m \neq x_n \dots (2.1.15) \text{ 慣性座標系 } S \text{ 内の2箇所に対応する時計を使用する。——二つの時計はそれぞれ異なる。——}$$

慣性座標系 S では、棒の両端の x 成分を記述した (2.1.15) の両辺を測定するのに時点の隔たり (2.1.14) を経る。(2.1.8) を使用すると、(2.1.19) を記述できる。(2.1.19) の両端のそれぞれの時点で、慣性座標系 S では棒の両端の x 成分となる (2.1.15) の両辺をそれぞれ測定することになる。

$$\Delta t_{mn} \neq 0 \dots (2.1.14)$$

$$t_m \neq t_n \dots (2.1.19) \text{ 慣性座標系 } S \text{ で棒の長さを測定する時点の関係}$$

ローレンツ変換の (2.21) を使用すると、慣性座標系 S_1 の時点の隔たり (2.1.10) を記述できる。(2.1.11) を (2.1.10) の左辺に代入すると (2.1.16) になる。(2.1.16) から慣性座標系 S の時点の隔たり (2.1.17) を導出できる。

$$t_1 = \gamma \cdot \left(t - \frac{u \cdot x}{c^2} \right) \dots (2.21)$$

$$\Delta t_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \right) \dots (2.1.10)$$

$$0 = \gamma \cdot \Delta t_{mn} - \frac{u}{c^2} \cdot \gamma \cdot \Delta x_{mn} \dots (2.1.16)$$

$$\Delta t_{mn} = \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \dots (2.1.17)$$

慣性座標系 S に静止している棒の長さ (2.1.13) が成立するので (2.1.17) は (2.1.18) を満足する. (2.1.18) は (2.1.14) に一致する. (2.1.7) を慣性座標系 S に静止している棒の長さとしているので, (a.3.2) に記述できる.

$$\Delta t_{mn} = \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \neq 0 \dots (2.1.18)$$

$$\Delta t_{mn} = \frac{u}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} > 0 \dots (a.3.2)$$

ローレンツ変換の (2.18) を使用して, 慣性座標系 S₁ での棒の両端の位置を計算すると, (2.1.20) および (2.1.21) になる. 2章1節では, (2.1.20) および (2.1.21) は (2.1.34) を満足することを示した.

$$x_1 = \gamma \cdot (x - u \cdot t) \dots (2.18)$$

$$x_{1m} = \gamma \cdot (x_m - u \cdot t_m) \dots (2.1.20)$$

$$x_{1n} = \gamma \cdot (x_n - u \cdot t_n) \dots (2.1.21)$$

$x_{1m} \neq x_{1n} \dots (2.1.34)$ 慣性座標系 S₁ 内の 2 箇所に対応する時計を使用する. ——二つの時計はそれぞれ異なる. ——

(a.3.1) の右辺にそれぞれ (2.1.20) および (2.1.21) を代入すると (a.3.3) を記述できる. (2.1.17) を (a.3.3) の右辺に代入すると (a.3.4) になる. (a.3.4) は (a.3.5) に整理できる.

$$\Delta x_{1mn} = \gamma \cdot (\Delta x_{mn} - u \cdot \Delta t_{mn}) \dots (a.3.3)$$

$$\Delta x_{1mn} = \gamma \cdot \left(\Delta x_{mn} - \frac{u^2}{c^2} \cdot \Delta x_{mn} \right) \dots (a.3.4)$$

$$\Delta x_{1mn} = \gamma \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \cdot \Delta x_{mn} > 0 \dots (a.3.5)$$

(a.3.5) は (a.3.6) にまとめることができる. (a.3.6) の左辺は慣性座標系 S₁ で計算した——棒は慣性座標系 S に静止している. ——棒の長さである. (a.3.6) では慣性座標系 S₁ での棒の長さは慣性座標系 S での長さよりも収縮していることになる.

$$\Delta x_{1mn} = \frac{1}{\gamma} \cdot \Delta x_{mn} > 0 \dots (a.3.6) \text{ 慣性座標系 } S_1 \text{ での棒の長さ}$$

(a.3.6) を (a.3.7) に書き直す. (a.3.7) では (a.3.8) および (a.3.9) を仮定する. (a.3.8) の添え字は棒が等速度で移動している慣性座標系の二つの異なる時計を使用して, その慣性座標系内の棒の長さを計算したことを意味する.

(a.3.9) の添え字は棒が静止している慣性座標系の二つの異なる時計を使用して, その慣性座標系内の棒の長さを計算したことを意味する.

$$L_{\text{moving_twoclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot L_{\text{rest_twoclocks}} > 0 \dots (a.3.7) \text{ 等速度運動する物体の長さは, その運動方向に収縮する.}$$

$$L_{\text{moving_twoclock_constant_velocity}} = \Delta x_{1mn} \dots (a.3.8) \text{ 等速度運動している場合の物体の長さ}$$

$$L_{\text{rest_twoclocks}} = \Delta x_{mn} \dots (a.3.9) \text{ 静止している場合の物体の長さ}$$

(a.3.7) の左辺では、二つの異なる時計で表す時点を使用している。一方、(3.1.38) の左辺では、1つの時計で表す時点を使用している。(a.3.7) および (3.1.38) で等しい箇所は‘移動している場合の棒の長さ’および‘静止している場合の棒の長さ’を記述している部分である。この等しい箇所について、(a.3.7) および (3.1.38) を書き直すと、(a.3.10) に記述できる。

$$L_{\text{moving_oneclock_constant_velocity}} = \frac{1}{\gamma} \cdot L_{\text{rest_twoclocks}} \dots (3.1.38) \text{等速度運動する1つの質点で測定した長さは、その運動方向に収縮する。}$$

$$L_{\text{moving}} = \frac{1}{\gamma} \cdot L_{\text{rest}} > 0 \dots (a.3.10)$$

本書では、速度の変換を導出する際に質点を仮定することになるので、本文の3章1節では質点を使用した場合で(3.1.38)を導出した。アインシュタインの特殊相対性理論での‘長さの収縮’を記述するには、この付録iiiのように質点を使用しないで、慣性座標系Sおよび慣性座標系S₁の位置および時点の‘点’から導出できる。

iv. 反対ベクトルおよび逆ベクトル

(a.4.1) はベクトルである。ここでは、ベクトル解析で使用するベクトル (a.4.1) の向きとは逆の向きになるベクトル (a.4.2) の説明をする。(a.4.1) および (a.4.2) のベクトルの大きさは等しく (a.4.3) になる。(a.4.2) のマイナスの記号はベクトル (a.4.2) の向きがベクトル (a.4.1) の向きとは逆であることを意味する。(a.4.2) のようなベクトルを (a.4.1) の反対ベクトルあるいは逆ベクトルと呼ぶ^{5) 6)}。

$$\mathbf{a} \dots (a.4.1)$$

$$-\mathbf{a} \dots (a.4.2)$$

$$|\mathbf{a}| \dots (a.4.3)$$

(a.4.2) を (a.4.4) に記述する。(a.4.4) は (a.4.5) に書き直すことができる。(a.4.4) の左辺は (a.4.1) の反対ベクトルになる。一方、(a.4.5) の左辺は (a.4.2) の反対ベクトルになる。

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a} \dots (a.4.4)$$

$$\mathbf{a} = -\mathbf{b} \dots (a.4.5)$$

v. 速度の変換の逆変換

速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) の逆変換を付録vで導出する。速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) には (2.22) が仮定されている。

$$v_{x1}(t_1) = \frac{v_x(t) - u}{1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)} \dots (3.3.60)$$

$$v_{y1}(t_1) = \frac{v_y(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.70)$$

$$v_{z1}(t_1) = \frac{v_z(t)}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t)\right)} \dots (3.3.78)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (= \text{const.}) \dots (2.22)$$

速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) の左辺には (3.2.51), (3.2.53) および (3.2.55) が記述されている. 速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) を慣性座標系 S_1 の (3.2.12), (3.2.14) および (3.2.16) について解く. この解となる三つの方程式は逆変換である.

$$v_{x1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{x_1^p(t_1 + h_1) - x_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.51)$$

$$v_{y1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{y_1^p(t_1 + h_1) - y_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.53)$$

$$v_{z1}(t_1) \equiv \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{z_1^p(t_1 + h_1) - z_1^p(t_1)}{h_1} \dots (3.2.55)$$

$$v_x(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^p(t+h) - x^p(t)}{h} \dots (3.2.12)$$

$$v_y(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^p(t+h) - y^p(t)}{h} \dots (3.2.14)$$

$$v_z(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^p(t+h) - z^p(t)}{h} \dots (3.2.16)$$

速度の変換の式 (3.3.60) を (a.5.1) に書き直す. (a.5.1) を (a.5.2) に記述する. (a.5.2) を (3.2.12) について整理するために, (a.5.3) に記述する. (a.5.3) を (3.2.12) について整理すると (a.5.4) になる.

$$v_{x1} \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) = v_x(t) - u \dots (a.5.1)$$

$$v_{x1} - v_{x1} \cdot \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) = v_x(t) - u \dots (a.5.2)$$

$$v_{x1} + u = v_x(t) + v_{x1} \cdot \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \dots (a.5.3)$$

$$v_{x1} + u = \left(1 + v_{x1} \cdot \frac{u}{c^2} \right) \cdot v_x(t) \dots (a.5.4)$$

(a.5.4) を (a.5.5) に書き直す. (a.5.5) では (a.5.6) を仮定する. (a.5.6) を仮定した (a.5.5) は速度の変換に対応する逆変換の (3.2.12) の式である.

$$v_x(t) = \frac{v_{x1} + u}{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}} \dots (a.5.5) \text{ 逆変換の式}$$

$$1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2} \neq 0 \dots (a.5.6) \text{ 仮定}$$

速度の変換の式 (3.3.70) を (a.5.7) に書き換える. (a.5.7) の左辺に (a.5.5) を代入すると, (a.5.8) になる. (a.5.8) では (a.5.6) が仮定されている.

$$v_{y1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) = v_y(t) \dots (a.5.7)$$

$$v_{y1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left\{ 1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{v_{x1} + u}{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}} \right\} = v_y(t) \cdots (\text{a.5.8})$$

(a.5.8) は (a.5.9) に記述できる. (a.5.9) の左辺の括弧内の計算は (a.5.10) の左辺の括弧内のように記述できる.

$$v_{y1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left\{ 1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{c^2 \cdot (v_{x1} + u)}{c^2 + u \cdot v_{x1}} \right\} = v_y(t) \cdots (\text{a.5.9})$$

$$v_{y1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - u \cdot \frac{v_{x1} + u}{c^2 + u \cdot v_{x1}} \right) = v_y(t) \cdots (\text{a.5.10})$$

(a.5.10) を (a.5.11) に記述できる. (a.5.11) は (a.5.12) に整理できる.

$$v_{y1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{c^2 + u \cdot v_{x1}}{c^2 + u \cdot v_{x1}} - \frac{u \cdot v_{x1} + u^2}{c^2 + u \cdot v_{x1}} \right) = v_y(t) \cdots (\text{a.5.11})$$

$$v_{y1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{c^2 - u^2}{c^2 + u \cdot v_{x1}} \right) = v_y(t) \cdots (\text{a.5.12})$$

(a.5.12) の左辺の括弧内は (a.5.13) の左辺の括弧内のように整理できる. (a.5.13) の左辺をまとめると, (a.5.14) に記述できる.

$$v_{y1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}} \right) = v_y(t) \cdots (\text{a.5.13})$$

$$\frac{v_{y1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2} \right)} = v_y(t) \cdots (\text{a.5.14})$$

(a.5.14) は (a.5.15) に書き直すことができる. (a.5.15) は逆変換の (3.2.14) の式である.

$$v_y(t) = \frac{v_{y1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2} \right)} \cdots (\text{a.5.15}) \text{ 逆変換の式}$$

速度の変換の式 (3.3.78) を (a.5.16) に書き直す. (a.5.16) の左辺に (a.5.5) を代入すると, (a.5.17) になる. (a.5.17) では (a.5.6) を仮定している.

$$v_{z1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \right) = v_z(t) \cdots (\text{a.5.16})$$

$$v_{z1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - \frac{u}{c^2} \cdot \frac{v_{x1} + u}{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}} \right) = v_z(t) \cdots (\text{a.5.17})$$

(a.5.17) は (a.5.18) に記述できる. (a.5.18) の左辺の括弧内の計算は (a.5.19) の左辺の括弧内のように記述できる.

$$v_{z1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(1 - u \cdot \frac{v_{x1} + u}{c^2 + u \cdot v_{x1}} \right) = v_z(t) \cdots (\text{a.5.18})$$

$$v_{z1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{c^2 + u \cdot v_{x1}}{c^2 + u \cdot v_{x1}} - \frac{u \cdot v_{x1} + u^2}{c^2 + u \cdot v_{x1}} \right) = v_z(t) \dots (\text{a.5.19})$$

(a.5.19) を (a.5.20) に記述できる. (a.5.20) は (a.5.21) に整理できる.

$$v_{z1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{c^2 - u^2}{c^2 + u \cdot v_{x1}} \right) = v_z(t) \dots (\text{a.5.20})$$

$$v_{z1}(t_1) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}} \right) = v_z(t) \dots (\text{a.5.21})$$

(a.5.21) の左辺の括弧内は (a.5.22) の左辺の括弧内のように整理できる. (a.5.22) は (a.5.23) に書き直すことができる. (a.5.23) は逆変換の (3.2.16) の式である.

$$\frac{v_{z1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2} \right)} = v_z(t) \dots (\text{a.5.22})$$

$$v_z(t) = \frac{v_{z1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2} \right)} \dots (\text{a.5.23}) \text{ 逆変換の式}$$

速度の変換 (3.3.60), (3.3.70) および (3.3.78) の逆変換は (a.5.5), (a.5.15) および (a.5.23) である. 逆変換 (a.5.5), (a.5.15) および (a.5.23) では (a.5.6) が仮定されている.

$$v_x(t) = \frac{v_{x1} + u}{1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2}} \dots (\text{a.5.5})$$

$$v_y(t) = \frac{v_{y1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2} \right)} \dots (\text{a.5.15})$$

$$v_z(t) = \frac{v_{z1}(t_1)}{\gamma \cdot \left(1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2} \right)} \dots (\text{a.5.23})$$

$$1 + \frac{u \cdot v_{x1}}{c^2} \neq 0 \dots (\text{a.5.6}) \text{ 仮定}$$

仮定 (a.5.6) から (a.5.24) が導出できる. 速度の変換では (3.3.59) が仮定されていた. (3.3.59) では (3.3.115) が導出できた.

$$u \cdot v_{x1}(t) \neq -c^2 \dots (\text{a.5.24})$$

$$1 - \frac{u}{c^2} \cdot v_x(t) \neq 0 \dots (3.3.59)$$

$$u \cdot v_x(t) \neq c^2 \dots (3.3.115)$$

参考文献

- 1) ROBERT RESNICK, 1968 : INTRODUCTION TO SPECIAL RELATIVITY, John Wiley & Sons, Inc., pp.1-18, pp.50-83.
- 2) H.A.LORENTZ, A.EINSTEIN, H.MINKOWSKI AND H.WEYL, 1923 TRANSLATION : THE PRINCIPLE OF RELATIVITY, DOVER PUBLICATIONS, INC., pp.46-48.
- 3) ROBERT RESNICK, DAVID HALLIDAY, KENNETH S. KRANE, 1992 : PHYSICS 4th Edition Volume1, John Wiley & Sons, Inc., pp.17-20, pp.467-481.
- 4) Peter J. Mohr, Barry N. Taylor, and David B. Newell, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland 20899-8420, USA (Dated: December 28, 2007) : CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2 0 0 6 , p.4, pp.6-7. (<http://physics.nist.gov/cuu/Constants/codata.pdf>)
- 5) 寺田文行：『新数学ライブラリ=0-II 代数 幾何』, (サイエンス社, 1986年), p.3.
- 6) 小松彦三郎：『岩波講座 応用数学 [基礎 6] ベクトル解析と多様体 I』, (岩波書店, 1994年), p.6.
- 7) 小玉英雄：『物理学基礎シリーズ6 相対性理論』, (倍風館, 1997年), pp.49-50.
- 8) [富岡和人, "AL COM.CVSystem.1 on Dec. 27, 2006", 循環系に関する研究報告, \(2006-12-27\)](#)
- 9) [富岡和人, "循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第一回"](#)
- 10) [富岡和人, "循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第二回"](#)
- 11) [富岡和人, "循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第三回"](#)
- 12) Vladimir A.Zorich, Roger Cooke(Translator), 2004 : Mathematical Analysis I , Springer, pp.128-129, pp.138-139, pp.173-181, pp.183-185, pp.196-197.
- 13) [富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 第一回"](#)
- 14) [富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 第五回"](#)
- 15) [富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 Option", pp.8-13.](#)
- 16) [富岡和人, "特殊相対性理論のエネルギーの変換と相対論的質量の変換"](#)
- 17) [富岡和人, "AL COM.CVSystem.2 on Dec. 25, 2008", 循環系に関する研究報告, \(2008-12-25\)](#).

免責事項

A LIFE COM.および外部の情報提供者は、ユーザーに対しこの Web サイトの内容について何ら保証するものではありません。ユーザーが A LIFE COM.の Web サイトを利用したことにより被った損失・損害、その他 A LIFE COM. の Web サイトに関連して被った損失・損害について、A LIFE COM. および外部の情報提供者は、一切責任を負いません。本資料は情報提供を目的として作成したものです。本資料の真偽に対しては、著者、A LIFE COM.および A LIFE COM.のバイオ研究室は一切の責任を負いません。

著作権

Copyright © 2008–2009 富岡和人 All rights reserved.

文書のプロパティの文書に関する制限の概要の表示内容については著者の許可のないものとします。

本ドキュメントのバックアップのコピーは許可します。

本ドキュメントを私的利用の範囲内で印刷することは許可します。

特殊相対性理論の速度の変換 とみおかかずひと 富岡和人著

作成日：2008年05月23日

発行日：2008年05月23日

改訂発行日：2008年07月16日

改訂発行日：2009年07月12日

循環系の回路モデルの文献

[“AL COM.CVSyst.1 on Dec. 27, 2006”, 循環系に関する研究報告, \(2006-12-27\)](#)

[“AL COM.CVSyst.2 on Dec. 25, 2008”, 循環系に関する研究報告, \(2008-12-25\)](#)

[“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第一回”](#)

[“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第二回”](#)

[“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第三回”](#)

電気の回路論の文献

[“電位の簡単な入門 2007 第一回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 第二回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 第三回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 第四回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 第五回”](#)

[“電位の簡単な入門 2007 Option”](#)

アインシュタインの特殊相対性理論の文献

[“特殊相対性理論の速度の変換”](#)

[“特殊相対性理論のエネルギーの変換と相対論的質量の変換”](#)

ホームページ

<http://www.alifecom.info/>

<http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/>

<http://book.geocities.jp/alifecominfo/>

<http://alifecominfo.aikotoba.jp/>

特殊相対性理論のページ

<http://www.alifecom.info/relativity.htm>

<http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/relativity.htm>

<http://book.geocities.jp/alifecominfo/relativity.htm>

<http://alifecominfo.aikotoba.jp/relativity.htm>